Ecoles Normales Supérieures 2007 - Math PC

Titre : *Inégalités de Clarkson et convergence forte.*

A- Oscillations et concentrations.

On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge faiblement vers 0 dans L^2 si et seulement si , pour toute fonction φ de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur un voisinage de 0 et de 1 (c'est-à-dire qu'il existe δ tel que φ soit nulle sur $[0,\delta]$ et $[1-\delta,1]$) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 u_n\varphi = 0$.

Elle converge fortement vers 0 dans L^2 si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|_2 = 0$.

QA.1 Soit $(u_n)_n$ une suite de E qui converge fortement vers 0 dans L^2.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_0^1 u_n\varphi\right| \leqslant \|u_n\|_2\|\varphi\|_2$$

entraîne la convergence faible de $(u_n)_n$ vers 0 dans L^2.

QA.2 Soit la suite $(u_n)_n$ dans E définie par $u_n(x) = \sin(nx)$.

L'intégration par parties

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\varphi(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx$$

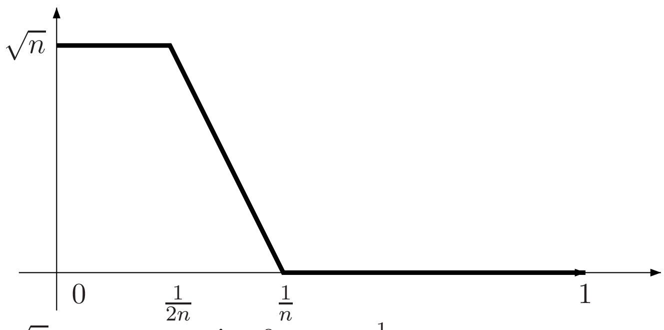
donne $\left|\displaystyle\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \dfrac{M}{n}$ avec $M = |\varphi(0)| + |\varphi(1)| + \displaystyle\int_0^1 |\varphi'(x)|\,dx$.

Ainsi la suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans L^2.

La relation $\sin^2(nx) = \dfrac{1-\cos(2nx)}{2}$ donne $\|u_n\|_2^2 = \displaystyle\int_0^1 \sin^2(nx)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n)}{4n}$ qui tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque $n \to +\infty$.

La suite $(u_n)_n$ ne converge donc pas fortement dans L^2 vers 0.

QA.3 La fonctions u_n suivante



définie par $u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ 2\sqrt{n}(1-nx) & \text{si} \quad \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$ est clairement dans E.

Soit φ de classe C^∞ sur $[0,1]$ et nulle sur un voisinage de 0 et de 1, donc nulle sur $[0,\delta]$ et $[1-\delta,1]$. Il existe n_0 tel que $\dfrac{1}{n_0} \leqslant \delta$. Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, on obtient

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_\delta^{1-\delta} u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{car } u_n \text{ s'annule sur } \left[\frac{1}{n},1\right].$$

La suite converge donc faiblement vers 0 dans L^2.

La minoration $\|u_n\|_2^2 \geqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2n}} u_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2}$ atteste la non convergence forte dans L^2 vers 0.

B- Inégalités de Hölder et interpolation.

QB.1 Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^+$ et $1 \leqslant p < +\infty$. On suppose que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ et on pose $y_1 = x_1^p$ et $y_2 = x_2^{p'}$. La concavité de la fonction logarithme donne

$$\ln(\frac{y_1}{p} + \frac{y_2}{p'}) \geqslant \frac{\ln(y_1)}{p} + \frac{\ln(y_2)}{p'} = \ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1 x_2).$$

Comme la fonction logarithme est croissante, on en déduit que

$$x_1 x_2 \leqslant \frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^{p'}}{p'}.$$

Le relation est trivialement vérifiée dès que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$

QB.2 En appliquant l'inégalité précédente à $x_1 = \lambda |f(x)|$ et $x_2 = |g(x)|$ avec $\lambda > 0$, on obtient

$$\lambda \int_0^1 |fg|\, dx \leqslant \frac{\lambda^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{p'} \|g\|_{p'}^{p'}.$$

On cherche λ de la forme $\lambda = \|f\|_p^\alpha \|g\|_{p'}^\beta$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En reportant, on obtient

$$\int_0^1 |fg|\, dx \leqslant \frac{\|f\|_p^{p+(p-1)\alpha} \|g\|_{p'}^{(p-1)\beta}}{p} + \frac{\|f\|_p^{-\alpha} \|g\|_{p'}^{p'-\beta}}{p'}.$$

Avec $\alpha = -1$ et $\beta = p' - 1$, on obtient $p + (p-1)\alpha = -\alpha = 1$ et $(p-1)\beta = p' - \beta = 1$.
Il en résulte que :

$$\int_0^1 |fg|\, dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)$$

d'où l'inégalité de Hölder puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

QB.3 Soient $f_1, \ldots, f_n$ n éléments de E, $p_1, \ldots, p_n$ n réels strictement positifs et $r \in [1, +\infty[$ liés par la relation $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \ldots + \dfrac{1}{p_n}$.
Dans cas $n = 2$, on a $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ avec $p = \dfrac{p_1}{r}$ et $p' = \dfrac{p_2}{r}$. L'inégalité de Hölder avec $f = f_1^r$ et $g = f_2^r$ donne

$$\int_0^1 |f_1(x) f_2(x)|^r\, dx \leqslant \left(\int_0^1 |f_1(x)|^{p_1}\, dx\right)^{\frac{r}{p_1}} \left(\int_0^1 |f_2(x)|^{p_2}\, dx\right)^{\frac{r}{p_2}}.$$

Une puissance $\dfrac{1}{r}$ donne $\|f_1 f_2\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$, ainsi la propriété est vraie à l'ordre 2.
Supposons la propriété vraie pour $n \geqslant 2$.
Soient $n+1$ réels $p_i > 0$ et r liés par la relation ci-dessus et $n+1$ éléments f_i de E. Posons $g = f_n f_{n+1}$ et q tel que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{p_{n+1}}$.
L'hypothèse de récurrence à l'ordre n donne $\|f_1, \ldots, f_{n-1} g\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_{n-1}\|_{p_{n-1}} \|g\|_q$.
La relation à l'ordre 2 donne $\|g\|_q \leqslant \|f_n\|_{p_n} \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}$ ainsi la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Par récurrence, on a établi que

$$\forall n \geqslant 2 \quad \|f_1, \ldots, f_n\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}$$

pour toute famille $f_1, \ldots, f_n$ d'éléments de E, $p_1, \ldots, p_n$ n réels strictement positifs et $r \in [1, +\infty[$ liés par la relation $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \ldots + \dfrac{1}{p_n}$.
Notons que la propriété est trivialement vérifiée pour $n = 1$.

QB.4 Considérons u appartenant à E. Soient p, q, r et θ avec $1 \leqslant p$, $q < +\infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

On suppose $0 < \theta < 1$ alors $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$ avec $p_1 = \dfrac{p}{\theta}$ et $p_2 = \dfrac{q}{1-\theta}$.
En notant $f_1 = |u|^\theta$ et $f_2 = |u|^{1-\theta}$, la propriété établie en **QB.3**, pour $n = 2$, donne $\|f_1 f_2\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$ qui est la relation désirée

$$\|u\|_r \leqslant \|u\|_p^\theta \|u\|_q^{1-\theta}.$$

Pour $\theta = 0$ ou $\theta = 1$, la relation est trivialement vérifiée.

QB.5 Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ avec $p_1 < p_2$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de E, bornée pour la norme $\|.\|_{p_2}$ et convergeant fortement vers $u \in E$ pour la norme $\|.\|_{p_1}$.
Pour $p \in]p_1, p_2[$, on a $\dfrac{1}{p} \in]\dfrac{1}{p_2}, \dfrac{1}{p_1}[$, d'où une relation barycentrique $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_2} + \dfrac{1-\theta}{p_1}$ avec $0 < \theta < 1$.
D'après **QB.4**, on obtient $\|u_n - u\|_p \leqslant \|u_n - u\|_{p_2}^\theta \|u_n - u\|_{p_1}^{1-\theta}$.
La convergence forte vers $u \in E$ pour la norme $\|.\|_{p_1}$ implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_{p_1}^{1-\theta} = 0$.
Par ailleurs, $\|u\|_{p_2}$ existe (car $u \in E$) et par inégalité triangulaire, on obtient $\|u_n - u\|_{p_2} \leqslant \|u_n\|_{p_2} + \|u\|_{p_2} \leqslant \|u\|_{p_2} + \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{p_2}$ pour tout n. La suite $\|u_n - u\|_{p_2}^\theta$ est donc bornée.
Il en résulte que la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.

C- Les inégalités de Clarkson.

QC.1 Soit $p \geqslant 2$.

QC.1.1 Etablissons, pour tout $t \geqslant 0$ et $q \geqslant 1$, l'inégalité $1 + t^q \leqslant (1+t)^q$.
La fonction différence $d : t \mapsto (1+t)^q - (1+t^q)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $d'(t) = q((1+t)^{q-1} - t^{q-1})$. On a $d'(t) \geqslant 0$ et $d(0) = 0$, ainsi $d(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$, d'où l'inégalité demandée.
En posant $p = 2q$ et $t = x^2$, on en déduit, pour $p \geqslant 2$ et tout x positif ou nul, la relation (2)

$$1 + x^p \leqslant (1 + x^2)^{\frac{p}{2}}.$$

QC.1.2 En posant $x = \dfrac{u}{v}$ avec $u \geqslant 0$ et $v > 0$, la relation (2) donne $u^p + v^p \leqslant (u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}}$.
Soient a, b réels quelconques. On suppose que $a \neq -b$.
On pose $u = \left|\dfrac{a-b}{2}\right|$ et $v = \left|\dfrac{a+b}{2}\right|$. La relation précédente donne, sachant que $u^2 + v^2 = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$,

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Si $a = -b$, cette relation est trivialement vérifiée.

QC.1.3 La convexité de la fonction $h : u \mapsto u^{\frac{p}{2}}$ sur $\mathbb{R}^+$, donne

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} = h\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \leqslant \frac{h(a^2)}{2} + \frac{h(b^2)}{2} = \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2}.$$

Avec **QC.1.2**, il vient

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2}.$$

Soient f et g deux éléments dans E. En posant $a = f(x)$ et $b = g(x)$, on obtient

$$\left|\frac{(f+g)(x)}{2}\right|^p + \left|\frac{(f-g)(x)}{2}\right|^p \leqslant \frac{|f(x)|^p}{2} + \frac{|g(x)|^p}{2}.$$

L'intégration sur $[0,1]$ donne l'inégalité de Clarkson (1) :

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p.$$

QC.2 Soient $f{,}g \in E$ et $1 < p < 2$.

QC.2.1 On note $h(x) = \frac{1}{2}\left((1+x)^p + (1-x)^p\right) - (1+x^{p'})^{p-1}$ pour $x \in]0,1[$.

QC.2.1.1 La fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$ est développable en série entière au voisinage de 0 avec

$$\forall t \in]-1,1[, \quad (1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)t^n}{n!}.$$

On en déduit l'expression suivante de $h(x)$, en tenant compte de la parité de $(1+x)^p + (1-x)^p$,

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-2k+1)x^{2k}}{(2k)!} - \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k)x^{p'k}}{k!}.$$

En distinguant les termes pairs et impairs dans $(1+x^{p'})^{p-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-2k+1)x^{2k}}{(2k)!} - \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-2k)x^{2p'k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-2k+1)x^{p'(2k-1)}}{(2k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p-2)\dots(p-2k)}{(2k-1)!}x^{2k}\left(\frac{p(p-1)}{2k(p-2k)} - \frac{p-1}{2k}x^{2p'k-2k} - \frac{p-1}{p-2k}x^{p'(2k-1)-2k}\right). \end{aligned}$$

Notons $A_k = \dfrac{1-x^{(2k-1)p'-2k}}{(2k-1)p'-2k} - \dfrac{1-x^{2kp'-2k}}{2kp'-2k}$ pour tout $k \geqslant 1$.

En développant, on obtient $A_k = \dfrac{p(p-1)}{2k(2k-p)} + \dfrac{p-1}{2k}x^{2p'k-2k} - \dfrac{p-1}{2k-p}x^{p'(2k-1)-2k}$.

Ainsi

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-(p-2)\dots(p-2k)}{(2k-1)!}x^{2k}A_k$$

L'expression $(p-2)\dots(p-2k)$ est composé d'un nombre impair de nombres négatifs donc $\frac{-(p-2)\dots(p-2k)}{(2k-1)!}x^{2k}$ est strictement positif pour tout $k \geqslant 1$.

L'étude du signe des A_k permet donc d'étudier le signe de $h(x)$.

QC.2.1.2 Soit $G : u \mapsto \dfrac{(1-x^u)}{u}$ avec $x \in]0,1[$ fixé.

La fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $G'(u) = \dfrac{x^u(1-u\ln(x))-1}{u^2} = \dfrac{N(x)}{D(x)}$.

La fonction N est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $N'(u) = -u\ln(x)^2x^u$ négatif. N est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ avec $N(0) = 0$. Ainsi N est négative sur $\mathbb{R}^+$.

Il en résulte que G est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

QC.2.1.3 p' est l'associé de $p \in]1,2[$ donc $p' > 1$. Pour tout $k \geqslant 1$, A_k peut donc s'écrire sous la forme $A_k = G((2k-1)p' - 2k) - G(2kp' - 2k)$. La décroissante de G entraîne $A_k > 0$.
L'étude effectuée en **QC.2.1.1** permet alors d'établir l'inégalité (4)

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) \geqslant 0.$$

QC.2.2 On exclut les cas $u = \pm v$, $u = 0$ et $v = 0$ où l'inégalité (5) est trivialement vérifiée. On note $x = \dfrac{v-u}{v+u}$, qui est un réel non nul et différent de ± 1.
On suppose que $x \in]0,1[$. En remplaçant dans $h(x)$, on obtient
$\dfrac{1}{2}\left((\dfrac{2v}{u+v})^p + (\dfrac{2u}{u+v})^p \right) \geqslant (1+(\dfrac{v-u}{v+u})^{p'})^{p-1}$ et $(1+(\dfrac{v-u}{v+u})^{p'})^{p-1} = \left(\dfrac{|\frac{u+v}{2}|^{p'} + |\frac{u-v}{2}|^{p'}}{|\frac{u+v}{2}|^{p'}} \right)^{p-1}$.
On a $p'(p-1) = p$, ainsi, en multipliant par $|\frac{u+v}{2}|^p$, il vient $\frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p \geqslant \left(|\frac{u+v}{2}|^{p'} + |\frac{u-v}{2}|^{p'} \right)^{p-1}$
Une puissance $\frac{1}{p-1}$ donne alors l'inégalité (5)

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p \right)^{\frac{1}{(p-1)}}.$$

Si $x > 1$, on considère $0 < \dfrac{v+u}{v-u} < 1$ et on obtient (5) car cette expression est invariante par le changement $u \longleftrightarrow -u$.
Si $x < 0$, on échange u et v pour se ramener au cas positif et on obtient (5) car cette expression est invariante par le changement $u \longleftrightarrow v$.
Finalement, l'inégalité (5) est vérifiée pour tout $u, v \in \mathbb{R}$.

QC.2.3 On note $a = \left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'}$ et $b = \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}$. On obtient $\|a\|_{p-1} = \left(\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{p-1}}$

Comme $p'(p-1) = p$, il vient $\|a\|_{p-1} = \left(\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{f+g}{2}\right|^{p} dx \right)^{\frac{p'}{p}} = \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'}$.
De même $\|b\|_{p-1} = \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'}$.
On a $0 < p-1 < 1$, ainsi l'inégalité de Minkowski s'applique et donne

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \leqslant \left(\int_0^1 \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Avec l'inégalité (5) $\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{1}{p-1}} &\leqslant \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left(\int_0^1 \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

En regroupant, on obtient l'inégalité de Clarkson (3)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \right)^{\frac{1}{(p-1)}}.$$

QC.3 Soient $(u_n)_n$ une suite de E et $u \in E$ vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_p = \|u\|_p \quad \text{et} \quad \|u\|_p \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p.$$

• Dans le cas $p \geqslant 2$, on dispose de l'inégalité de Clarkson (1)

$$\left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p.$$

Notons $L = \liminf_{n\to+\infty} \|\frac{u_n+u}{2}\|_p$. La définition de $\liminf_{n\to+\infty}$ donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0 \quad L - \varepsilon \leqslant \inf_{k>n} \left\|\frac{u_k+u}{2}\right\|_p \leqslant L.$$

Ayant $\inf_{k>n} \left\|\frac{u_k+u}{2}\right\|_p \leqslant \left\|\frac{u_{n+1}+u}{2}\right\|_p$ on peut donc écrire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0 \quad \|u\|_p - \varepsilon \leqslant L - \varepsilon \leqslant \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p.$$

L'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_p = \|u\|_p$ donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1,\ \forall n > n_1 \quad \|u_n\|_p \leqslant \|u\|_p + \varepsilon.$$

Si $\|u\|_p = 0$, une majoration par inégalité triangulaire et l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_p = \|u\|_p$ donnent $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_p = 0$. Ainsi $(u_n)_n$ converge fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.
On suppose désormais que $\|u\|_p > 0$ et on choisit $0 < \varepsilon < \|u\|_p$.
Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, l'inégalité de Clarkson (1) donne

$$(\|u\|_p - \varepsilon)^p + \left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(\|u\|_p + \varepsilon)^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p.$$

ainsi

$$\left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(\|u\|_p + \varepsilon)^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p - (\|u\|_p - \varepsilon)^p. \leqslant (\|u\|_p + \varepsilon)^p - (\|u\|_p - \varepsilon)^p.$$

Pour $0 < A < B$, une inégalité des accroissement finis donne $A^p - B^p \leqslant p(A-B)A^{p-1}$, ainsi

$$\left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p \leqslant 2p\varepsilon(\|u\|_p + \varepsilon)^{p-1} \leqslant 2p\varepsilon(2\|u\|_p)^{p-1}.$$

La suite $(u_n)_n$ converge donc fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.
• Dans le cas $1 < p < 2$, le conjugué p' vérifie $p' > 2$ et on dispose de l'inégalité de Clarkson (3)

$$\left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p\right)^{\frac{1}{(p-1)}}.$$

Comme précédemment, pour $0 < \varepsilon < \|u\|_p$ et $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^{p'} &\leqslant \left(\frac{1}{2}(\|u\|_p + \varepsilon)^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p\right)^{\frac{1}{(p-1)}} - (\|u\|_p - \varepsilon)^{p'} \\
&\leqslant (\|u\|_p + \varepsilon)^{p'} - (\|u\|_p - \varepsilon)^{p'} \\
&\leqslant 2p'\varepsilon(\|u\|_p + \varepsilon)^{p'-1} \leqslant 2p'\varepsilon(2\|u\|_p)^{p'-1}
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_n$ converge donc fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.