

Concours CCP, épreuve 1, filière PSI, 2007

PARTIE I : Les suites α et β

I.1. Étude de la suite α

I.1.1. $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 2$; $\alpha_4 = 9$.

I.1.2. Par récurrence immédiate, α_n est un entier relatif pour tout n . Les nombres α_0 et α_1 sont entiers naturels et on montre par récurrence que $\alpha_n \geq 1$ pour tout $n \geq 2$: l'inégalité est vraie pour $n = 2$ et, si elle est vraie pour un entier $n \geq 2$ donné, alors

$$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \geq (n+1)\alpha_n - 1 \geq 3 \times 1 - 1 = 2 \geq 1.$$

I.2. Étude de la suite β

I.2.1. $\beta_0 = 1$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right) = 1$; $\beta_3 = 2$; $\beta_4 = 9$.

I.2.2. On a $\beta_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k!$ divise $n!$, donc $\beta_n \in \mathbf{Z}$.

I.2.3. $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (n+1)! \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) = (-1)^{n+1}$.

I.2.4. Les suites α et β ont le même premier terme $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et vérifient la même relation de récurrence $x_{n+1} = (n+1)x_n + (-1)^{n+1}$, donc $\alpha = \beta$ d'après le principe de récurrence.

I.3. Étude de ρ_n

I.3.1. La suite $\left(\frac{1}{n!}\right)$ est décroissante et tend vers zéro, et ρ_n est le reste d'ordre n de la série alternée $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$. Cette série vérifiant les hypothèses du critère spécial, on peut affirmer

que ρ_n est du signe du "premier terme négligé" $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc est du signe de $(-1)^{n+1}$.

I.3.2. Toujours par le critère spécial des séries alternées, ρ_n est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé, soit $|\rho_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$, donc $n! |\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Montrons par l'absurde que l'inégalité est stricte : si, pour un n donné, on avait $|\rho_n| = \frac{1}{(n+1)!}$, soit $\rho_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, on aurait alors $\rho_{n+1} = 0$, c'est-à-dire $\rho_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}$,

mais ceci est absurde puisqu'on doit aussi avoir $|\rho_{n+2}| \leq \frac{1}{(n+3)!}$.

I.3.3. On a $e^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{\beta_n}{n!} + \rho_n$, donc

$$|e^{-1}n! - \beta_n| = n! |\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2},$$

donc β_n est l'entier le plus proche de $e^{-1}n!$

I.4. Étude d'une fonction

I.4.1. La fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ est continue sur l'intervalle $I =]-1; 1[$, donc le problème de

Cauchy $\begin{cases} y' - \frac{x}{1-x} y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution sur cet intervalle. La résolution de

l'équation différentielle $y' = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)y$ donne $y = A \exp(-\ln(1-x) - x) = A \frac{e^{-x}}{1-x}$,

puis la condition initiale impose $A = 1$. Finalement, $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

I.4.2. C'est évident!

I.4.3. On part de la relation $(1-x)f(x) = e^{-x}$ et on dérive $n+1$ fois par la formule de

Leibniz : $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((1-x)f(x)) = (-1)^{n+1}e^{-x}$, soit

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left[\frac{d^k}{dx^k}(1-x) \right] f^{(n+1-k)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x},$$

ou encore (seuls les termes pour $k=0$ et $k=1$ apportent une contribution) :

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}.$$

I.4.4. En évaluant la relation ci-dessus pour $x=0$, on a $f^{(n+1)}(0) - (n+1)f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}$. Comme par ailleurs $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$, la suite $(f^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ a le même premier terme et vérifie la même relation de récurrence que la suite β , donc $\beta_n = f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n .

PARTIE II : La suite γ

Pour abréger les notations, posons $E_n = \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour la culture, les permutations de \mathcal{S}_n sans point fixe sont appelées **dérangements**.

II.1. On a $\mathcal{S}_1 = \{\text{id}_{E_1}\}$, donc $\gamma_1 = 0$. Puis $\mathcal{S}_2 = \{\text{id}_{E_2}; (1\ 2)\}$, le seul élément de \mathcal{S}_2 sans point fixe est la transposition $(1\ 2)$, donc $\gamma_2 = 1$.

II.2. Le groupe symétrique \mathcal{S}_3 contient $3! = 6$ éléments qui se répartissent de la façon suivante :

- l'identité id_{E_3} qui a 3 points fixes ;
- les trois transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$ qui ont chacune un point fixe ;
- les deux cycles de longueur 3 (ou 3-cycles) notés $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$ qui sont sans point fixe.

Donc $\gamma_3 = 2$.

II.3.

II.3.1. Ce sont les transpositions ; elles sont au nombre de $\binom{4}{2} = 6$ puisqu'il faut choisir quels sont les deux éléments parmi 4 que l'on permute. Listons-les : $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(1\ 4)$, $(2\ 3)$, $(2\ 4)$, $(3\ 4)$.

II.3.2. Ce sont les 3-cycles : ils sont au nombre de 8 puisqu'il y a 4 façons possibles de choisir le support (ensemble de 3 éléments parmi 4) et, le support étant choisi, il y a deux "sens" possibles. En voici une liste : $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$, $(1\ 2\ 4)$, $(1\ 4\ 2)$, $(1\ 3\ 4)$, $(1\ 4\ 3)$, $(2\ 3\ 4)$, $(2\ 4\ 3)$.

II.3.3. On a $\text{Card}(\mathcal{S}_4) = 4! = 24$. Aucune permutation dans \mathcal{S}_4 ne peut avoir trois points fixes exactement (quelle serait l'image du seul point non fixe ?), n'oublions pas l'identité id_{E_4} qui a 4 points fixes. Par soustraction, le nombre d'éléments de \mathcal{S}_4 sans point fixe est

$$\gamma_4 = 24 - 6 - 8 - 1 = 9.$$

Remarque. Les dérangements dans \mathcal{S}_4 sont :

- les cycles de longueur 4, il y en a 6 :

(1 2 3 4) ; (1 2 4 3) ; (1 3 2 4) ; (1 3 4 2) ; (1 4 2 3) ; (1 4 3 2) ;

- les produits (commutatifs) de deux transpositions à supports disjoints, il y en a 3 :

$$(1\ 2) \circ (3\ 4) \quad ; \quad (1\ 3) \circ (2\ 4) \quad ; \quad (1\ 4) \circ (2\ 3) .$$

II.4. Relation entre les γ_k

II.4.1. $\text{Card}(\mathcal{S}_n) = n!$

II.4.2. Pour dénombrer les éléments de \mathcal{S}_n ayant exactement k points fixes, on raisonne de la façon suivante : il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k points fixes parmi les n éléments de E_n et, ceux-ci étant choisis, la permutation considérée induit un dérangement sur l'ensemble des $n - k$ points restants (γ_{n-k} choix possibles). Le nombre d'éléments de \mathcal{S}_n ayant exactement k points fixes est donc $\binom{n}{k} \gamma_{n-k}$.

II.4.3. Le nombre de points fixes d'un élément de \mathcal{S}_n étant évidemment un entier entre 0 et n , il résulte de la question précédente que

$$n! = \text{Card}(\mathcal{S}_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \gamma_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k$$

par symétrie des coefficients binomiaux, puis réindexation.

II.5.

II.5.1. On a $\left| \frac{\gamma_n}{n!} \right| = \frac{\gamma_n}{n!} \leq 1$; or, la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1. Par comparaison, la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

II.5.2. Les fonctions g et $x \mapsto e^x$ sont développables en série entière sur $] - 1, 1[$; il en est donc de même de la fonction produit h et son développement en série entière est le produit de Cauchy des deux précédents, à savoir

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\gamma_p}{p!} x^p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^q}{q!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{\gamma_p}{p! q!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{k! (n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n . \end{aligned}$$

II.5.3. On vient de montrer que, pour tout $x \in] - 1, 1[$, on a $h(x) = \frac{1}{1-x}$. On a donc

$g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$, soit $g = f$ sur $] - 1, 1[$. On a alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$, donc le rayon de

convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ est 1 exactement : si on avait $R > 1$, alors g serait continue sur $] - R; R[$ et ne pourrait avoir une limite à gauche infinie au point 1.

II.5.4. On a alors $\gamma_n = g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) = \beta_n$ (question **I.4.4.**), donc $\beta = \gamma$.

II.5.5. et II.5.6. On sait que $\gamma_n = \beta_n$ est l'entier le plus proche de $e^{-1}n!$, on a donc $e^{-1}n! - \frac{1}{2} < \gamma_n < e^{-1}n! + \frac{1}{2}$, d'où l'on tire facilement que $\gamma_n \sim e^{-1}n!$, ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_n}{n!} = e^{-1}$. Les séries numériques $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\gamma_n}{n!}$ ne peuvent converger puisque leur terme général ne tend pas vers zéro. L'ensemble de définition de la fonction g est donc exactement $] - 1; 1[$.

II.5.7. Le nombre $\gamma_8 = \beta_8$ est l'entier le plus proche de $8! e^{-1}$. Une calculatrice (*autorisée à cette épreuve*) donne $8! e^{-1} \simeq 14832,899$. On a donc $\gamma_8 = 14833$.

PARTIE III : Sur $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$

III.1. La série $\sum_{n \geq 0} v_n$

III.1.1. On a $0 \leq J_n \leq e \int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ (théorème d'encadrement).

III.1.2. La suite (J_n) est décroissante (en effet, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^{n+1}e^x \leq x^n e^x$, donc $J_{n+1} \leq J_n$) et tend vers zéro ; la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge donc par application du critère spécial des séries alternées.

III.2. Estimation intégrale de δ_n

III.2.1. C'est la formule de Taylor avec reste intégral dont je rappelle l'énoncé : si f est une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un segment $[a, b]$, on a alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt .$$

On peut aussi démontrer la relation demandée par récurrence sur n en effectuant une intégration par parties.

III.2.2. On applique la formule (1) avec $x = -1$, on multiplie par $n!$, on fait le changement de variable $u = 1 + t$ dans l'intégrale et on assaisonne avant de servir :

$$\begin{aligned} e^{-1}n! &= \beta_n + \int_0^{-1} (-1-t)^n e^t dt = \beta_n + \int_1^0 (-u)^n e^{u-1} du \\ &= \beta_n + (-1)^{n+1} e^{-1} \int_0^1 u^n e^u du = \beta_n + e^{-1}v_n . \end{aligned}$$

On a donc $\delta_n = e^{-1}v_n$.

III.3. Sur la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$

La série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente (III.1.2.), il en est donc de même de la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$.

On a $|\delta_n| = e^{-1} J_n$ et une intégration par parties donne $J_n = \frac{e - J_{n+1}}{n+1}$. Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$, on en déduit l'équivalent $J_n \sim \frac{e}{n}$, puis $|\delta_n| \sim \frac{1}{n}$, la série $\sum_{n \geq 0} |\delta_n|$ est donc divergente.

III.4. Sur la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$

III.4.1. On a $\frac{|\delta_n|}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ (cf. III.1.1.), donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$ converge.

III.4.2.

III.4.2.1. La fonction $\varphi : x \mapsto -e^x \ln(1-x)$ est continue sur $I =]0, 1[$, positive, et $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -e \ln(1-x)$, cette dernière fonction étant intégrable sur $]0, 1[$ puisque $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1[$ d'après le cours. La fonction φ est donc aussi intégrable sur $]0, 1[$, d'où la convergence de l'intégrale impropre A .

III.4.2.2. Sur $I =]0, 1[$, on a $\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n$ avec $\varphi_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$. Les fonctions φ_n sont continues et intégrables sur I et la série $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ converge simplement sur I vers la fonction continue φ ; par ailleurs, la série $\sum_{n \geq 1} \int_I |\varphi_n| = \sum_{n \geq 1} \int_I \varphi_n = \sum_{n \geq 1} \frac{J_n}{n} = e \sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$ est convergente donc (théorème d'intégration terme à terme) la fonction φ est intégrable sur I (on le sait déjà) et

$$A = \int_I \varphi = \int_I \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I \varphi_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}.$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} = e^{-1} A$.

III.4.3. La convergence (absolue) de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ est immédiate.

Avec le changement de variable $t = 1 - x$, on a

$$A = e \int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt = e \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \ln t \right) dt.$$

En posant $u_n(t) = \frac{(-1)^n t^n \ln t}{n!}$, chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $]0, 1[$, la

série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers une fonction continue sur $]0, 1]$ et

$$\int_0^1 |u_n| = -\frac{1}{n!} \int_0^1 t^n \ln t \, dt = \frac{1}{n!} \left(- \left[\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n \, dt \right) = \frac{1}{n!(n+1)^2}$$

(terme général d'une série convergente) donc le théorème d'intégration terme à terme permet d'affirmer que

$$A = e \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = e \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) \, dt = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} = e^{-1} A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}.$$

III.4.4. Il s'agit de trouver une valeur approchée à $\frac{1}{600}$ près de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$. En utilisant cette dernière expression, on voit que c'est la somme d'une

série alternée vérifiant les hypothèses du critère spécial. Il suffit donc (*majoration en valeur absolue du reste d'ordre n par le terme d'indice $n+1$*) de trouver un entier n tel que

$\frac{1}{(n+1)!(n+2)^2} \leq \frac{1}{600}$, c'est vérifié pour $n = 3$ (*il y a alors égalité*). En posant

$s_3 = \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$, alors s_3 est un nombre rationnel tel que $|S - s_3| \leq \frac{1}{600}$. On ex-

plicite enfin $s_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{1}{96} = \frac{229}{288} = 0.79513888\dots$ On a donc la réponse avec

$$\frac{p}{q} = \frac{229}{288}.$$

Si on demande à MAPLE une valeur approchée (`evalf`) de la somme S , on trouve 0.7965995993

(avec dix décimales) et on vérifie que $\left| S - \frac{p}{q} \right| \simeq 0.0014607 \simeq \frac{1}{685} < \frac{1}{600}$.