

## CENTRALE.SUPÉLEC - M1 - MPSI

Corrigé par Taoufik said

**Q1.** On a :  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle$  et  $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$  donc

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

Autrement dit, la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme basé sur les vecteurs  $a$  et  $b$  est égale au double de la somme des carrés de deux normes  $\|a\|$  et  $\|b\|$ .

**Q2.** Posons  $a = u - v$  et  $b = u - v'$ .

On a :  $\|a\| = \|b\|$ , par **Q1**, on écrit

$$\|2u - (v + v')\|^2 + \|v - v'\|^2 = \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = 4\|u - v\|^2$$

puisque  $\|v - v'\| > 0$  alors  $\|u - v\| > \|u - \frac{v+v'}{2}\|$ .

**Q3.** Notons  $d = \inf_{w \in F} \|u - w\|$ . Par caractérisation séquentielle, il existe une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $F$  vérifiant

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - w_n\|$$

Cette suite est bornée ( car  $\|w_n\| \leq \|u\| + \|u - w_n\|$  ), par Bolzano-Weierstrass ( on est en dimension finie ), elle admet une suite extraite  $(v_n)$  convergente vers  $v \in \overline{F} = F$  (  $F$  est fermé ).

Par continuité de l'application  $x \mapsto \|x - u\|$ , on écrit

$$\|v - u\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u\| = d$$

d'où la propriété cherchée.

**Q4.** L'existence est déjà vue en **Q3**. Pour l'unicité, on suppose qu'il existe un autre vecteur  $v' \in C$  vérifiant la propriété.

Par convexité de  $C$ ,  $\frac{v+v'}{2} \in C$  et par **Q2**, on a :

$$\|u - v\| > \|u - \frac{v+v'}{2}\|$$

ce qui est absurde.

**Q5.** Par concavité de logarithme, on a :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln a + \ln b = \ln ab$$

par croissance de l'exponentielle, on obtient :

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

**Q6.** Posons  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$ .

Si  $\mathbb{E}(|X|^p) = 0$ , alors  $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \mathbb{P}(X = x_i) = 0$  donc

pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \neq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = x_i) = 0$

puis  $X = 0$  presque sûrement puis  $|XY|$  l'est aussi et par suite l'inégalité est vérifiée. De même, si  $\mathbb{E}(|Y|^q) = 0$ .

On suppose que  $\mathbb{E}(|X|^p) \neq 0$  et  $\mathbb{E}(|Y|^q) \neq 0$ . Quitte à remplacer  $X$  et  $Y$  par  $\tilde{X} = \frac{X}{\mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}}$  et  $\tilde{Y} = \frac{Y}{\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}}$ , on peut supposer que  $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$ .

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|XY|) &= \sum_{i,j} |x_i| |y_j| \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &\leq \sum_{i,j} \left( \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_j|^q}{q} \right) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^m |y_j|^q \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \mathbb{P}(X = x_i) + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^m |y_j|^q \mathbb{P}(Y = y_j) \\ &= \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{p} + \frac{\mathbb{E}(|Y|^q)}{q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p} \mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q} \end{aligned}$$

**Q7.** On a  $X(\Omega)$  est fini, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(X = x | A_i) \mathbb{P}(A_i) && \text{(Probabilités totales)} \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x | A_i) && \text{(Les deux sommes sont finies)} \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \mathbb{E}(X | A_i)
\end{aligned}$$

**Q8.** On pose :  $I = \int_0^{+\infty} t \mathbb{P}(|X| \geq t) dt$ . On a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{[0, \sqrt{y_1}]} t \mathbb{P}(|X| \geq t) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}]} t \mathbb{P}(|X| \geq t) dt + \int_{[\sqrt{y_n}, +\infty[} t \mathbb{P}(|X| \geq t) dt \\
&= \int_{[0, \sqrt{y_1}]} t \mathbb{P}(X^2 \geq y_1) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}]} t \mathbb{P}(X^2 \geq y_{i+1}) dt + \int_{[\sqrt{y_n}, +\infty[} t \mathbb{P}(X^2 > y_n) dt \\
&= 1. \int_{[0, \sqrt{y_1}]} t dt + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X^2 \geq y_{i+1}) \int_{]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}]} t dt + 0. \int_{[\sqrt{y_n}, +\infty[} t dt \\
&= \frac{y_1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X^2 \geq y_{i+1}) \frac{y_{i+1} - y_i}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X^2 = y_i) y_i \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E}(X^2)
\end{aligned}$$

**Q9.** D'après **Q8** et l'hypothèse sur  $X$ , on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= 2 \int_0^{+\infty} t \mathbb{P}(|X| \geq t) dt \\
&\leq 2a \int_0^{+\infty} t \exp(-bt^2) dt = -\frac{a}{b} [\exp(-bt^2)]_0^{+\infty} = \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

**Q10.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $x$  est un réel qui vérifie  $|x + \delta| \geq t$  alors

$$|x| \geq |x + \delta| - |\delta| \geq t - |\delta|$$

donc  $\{\omega \in \Omega, |X(\omega) + \delta| \geq t\} \subseteq \{\omega \in \Omega, |X(\omega)| \geq t - |\delta|\}$

puis  $\mathbb{P}(|X + \delta| \geq t) \leq \mathbb{P}(|X| \geq t - |\delta|)$ .

**Q11.** Le discriminant du trinôme  $b(t - |\delta|)^2 + a - \frac{1}{2}bt^2$  est égal à  $2b^2(\delta^2 - \frac{a}{b}) \leq 0$ .

D'où  $-b(t - |\delta|)^2 \leq a - \frac{1}{2}bt^2$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Q12.** Soit  $t \geq |\delta|$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X + \delta| \geq t) &\leq \mathbb{P}(|X| \geq t - |\delta|) && (\text{ par Q10}) \\ &\leq a \exp(-b(t - |\delta|)^2) && (\text{ car } t - |\delta| \geq 0) \\ &\leq a \exp(a - \frac{1}{2}bt^2) && (\text{ par Q11}) \\ &\leq ae^a \exp(-\frac{bt^2}{2}) \end{aligned}$$

**Q13.** On a :  $1 = \mathbb{P}(|X| \geq 0) \leq a \exp(-\frac{b \cdot 0^2}{2}) = a$ , donc, pour  $t \in [0, |\delta|]$ , on a :

$$\begin{aligned} a \exp(a) \exp(-\frac{b \cdot t^2}{2}) &\geq a \exp(a) \exp(-\frac{b \cdot \delta^2}{2}) \\ &\geq a \exp(a) \exp(-\frac{b \cdot a}{2b}) \\ &\geq a \exp(\frac{a}{2}) \\ &\geq 1 \\ &\geq \mathbb{P}(|X + \delta| \geq t) \end{aligned}$$

**Q14.** Si  $C \cap X(\Omega) = \emptyset$  alors  $\mathbb{P}(X \in C) = 0$  donc l'inégalité s'écrit

$$0 \cdot \mathbb{E} \left( \exp \left( \frac{1}{8} d(X, C) \right) \right) \leq 1.$$

**Q15.** Posons  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$  et  $Y_i = \left( \frac{u_i - \varepsilon_i}{2} \right)^2$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Les variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_n$  sont indépendantes car  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  le sont. En plus, elles suivent toutes la loi  $B(\frac{1}{2})$ , donc leur somme  $\frac{1}{4}d(X, u)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i$  suit la loi  $B(n, \frac{1}{2})$ .

**Q16.** Par formule de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \exp \left( \frac{1}{8} d(X, u)^2 \right) \right) &= \sum_{k=0}^n e^{k/2} C_n^k \left( \frac{1}{2} \right)^k \left( \frac{1}{2} \right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k \left( \frac{e^{1/2}}{2} \right)^k \left( \frac{1}{2} \right)^{n-k} \\
&= \left( \frac{e^{1/2} + 1}{2} \right)^n \\
&\leq \left( \frac{3 + 1}{2} \right)^n = 2^n
\end{aligned}$$

**Q17.** Pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on a :

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} (d(x, y)) \leq d(x, u) \quad \text{car } u \in C$$

D'où  $d(X, C) \leq d(X, u)$ . D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in C) &= \mathbb{P}(X = u) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{4}d(X, u)^2 = 0\right) \\
&= 2^{-n}
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E} \left( \exp \left( \frac{1}{8} d(X, u)^2 \right) \right) \leq \mathbb{P}(X \in C) \cdot 2^n = 1$$

**Q18.** Par hypothèse,  $C \cap X(\Omega)$  contient deux vecteurs  $\zeta = \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i + e_n$  et  $\zeta' =$

$\sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i - e_n$  où les coordonnées  $u_1, \dots, u_{n-1}$  sont des  $\pm 1$ .

Si  $n = 1$  alors  $\zeta = e_1$  et  $\zeta' = -e_1$  et  $X(\Omega) = \{\zeta, \zeta'\}$  puis  $\mathbb{P}(X \in C) = 1$  et  $d(X, C) = 0$ , d'où c'est un cas d'égalité.

**Q19.** Soit  $x' \in E'$  et  $t \in \{-1, 1\}$ .

$\Rightarrow$ ) Si  $x' \in C_t$  alors, il s'écrit  $x' = \pi(a + te_n)$  avec  $a + te_n \in C$  et  $a \in E'$

sous ces conditions, on a  $\pi(a + te_n) = a$  d'où  $x' + te_n = a + te_n \in C$ .

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $x' + te_n \in C$ . On a  $x' \in E'$  donc  $x' + te_n \in H_t$  puis  $x' + te_n \in C \cap H_t$

comme  $\pi(x' + te_n) = x'$  alors  $x' \in \pi(C \cap H_t) = C_t$ .

**Q20.** On rappelle que  $\zeta = \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i + e_n$  et  $\zeta' = \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i - e_n$  sont dans  $X(\Omega) \cap C$

- On a :  $\zeta \in C_1$  et  $\zeta' \in C_{-1}$  donc ils sont non vides.
- Soient  $t \in \{-1, 1\}$ ,  $x', y' \in C_t$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ . Par **Q19**,  $x' + te_n \in C$  et  $y' + te_n \in C$  puis  $\lambda(x' + te_n) + (1 - \lambda)(y' + te_n) \in C$  ( car  $C$  est convexe ), c.à.d.  $\lambda x' + (1 - \lambda)y' + te_n \in C$  puis  $\lambda x' + (1 - \lambda)y' \in C_t$  ( par **Q19** ). D'où la convexité de  $C_t$ .
- Soit  $(x'_i)_i$  une suite d'éléments de  $C_t$  qui converge vers  $x'$ . La suite  $(x'_i + te_n)_i \in C^{\mathbb{N}}$  converge vers  $x' + te_n$  lorsque  $i$  tend vers  $+\infty$ , puisque  $C$  est fermé, alors  $x' + te_n \in C$  puis  $x' \in C_t$ , d'où  $C_t$  est fermé.

**Q21.**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in C) &= \mathbb{P}(X \in C | X' \in C_1) \mathbb{P}(X' \in C_1) + \mathbb{P}(X \in C | X' \in C_{-1}) \mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \\
&= \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) \mathbb{P}(X' \in C_1) + \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) \mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X' \in C_1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X' \in C_{-1})
\end{aligned}$$

**Q22.** Soit  $\omega \in \Omega$ . On a  $Y_{\varepsilon_n(\omega)} \in C_{\varepsilon_n(\omega)}$  et  $Y_{-\varepsilon_n(\omega)} \in C_{-\varepsilon_n(\omega)}$  donc  $Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)e_n \in C$  et  $Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)e_n \in C$  par convexité de  $C$ , on a :  $(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)e_n) \in C$  d'où  $d(X(\omega), C) \leq \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)e_n) - X\|$ . Ceci pour tout  $\omega \in \Omega$ , d'où le résultat cherché.

**Q23.** Notons  $N = \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|^2$ . On a :

$$\begin{aligned}
N &= \|(1 - \lambda)Y_{\varepsilon_n} + \lambda Y_{-\varepsilon_n} + (1 - \lambda)\varepsilon_n e_n - \lambda \varepsilon_n e_n - X' - \varepsilon_n e_n\|^2 \\
&= \left\| \underbrace{(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')}_{\in E'} - \underbrace{2\lambda \varepsilon_n e_n}_{\in E'^{\perp}} \right\|^2 \\
&= \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 + \|2\lambda \varepsilon_n e_n\|^2 \quad (\text{Théorème de Pythagore}) \\
&= \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 + 4\lambda^2
\end{aligned}$$

d'où

$$d(X, C)^2 \leq \|(1 - \lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 + 4\lambda^2$$

Pour l'autre inégalité, on pose :  $\chi = Y_{\varepsilon_n} - X'$ ,  $\psi = Y_{-\varepsilon_n} - X'$  et  $D = \|(1 - \lambda)\chi + \lambda\psi\|^2 - (1 - \lambda)\|\chi\|^2 - \lambda\|\psi\|^2$ . On a :

$$\begin{aligned}
D &= (1 - \lambda)^2 \|\chi\|^2 + \lambda^2 \|\psi\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\langle \chi, \psi \rangle - (1 - \lambda)\|\chi\|^2 - \lambda\|\psi\|^2 \\
&= -\lambda(1 - \lambda) (\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - 2\langle \chi, \psi \rangle) \\
&= -\lambda(1 - \lambda) \|\chi - \psi\|^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

**Q24.** On a :

$$\begin{aligned}
(X' \in C_{-1}) &= \{\omega \in \Omega, X'(\omega) \in C_{-1}\} \\
&= \{\omega \in \Omega, X'(\omega) - e_n \in C\} \\
&= \{\omega \in \Omega, \varepsilon_n(\omega) = -1\} \\
&\supseteq \{\omega \in \Omega, X(\omega) = \zeta'\}
\end{aligned}$$

Comme  $\zeta' \in X(\Omega)$  alors  $p_- = \mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \geq \mathbb{P}(X = \zeta') > 0$ . **Q25.** Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Pour  $\omega \in \Omega$  tel que  $\varepsilon_n(\omega) = -1$ , on a :

$$\frac{1}{8}d(X(\omega), C)^2 \leq \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1-\lambda}{8}d(X'(\omega), C_{-1})^2 + \frac{\lambda}{8}d(X'(\omega), C_1)^2 \quad (\text{par } \mathbf{Q.23})$$

puis

$$\exp\left(\frac{1}{8}d(X(\omega), C)^2\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \left[\exp\left(\frac{1}{8}d(X'(\omega), C_{-1})^2\right)\right]^{1-\lambda} \left[\exp\left(\frac{1}{8}d(X'(\omega), C_1)^2\right)\right]^\lambda$$

La croissance et la linéarité de l'espérance permettent d'obtenir l'inégalité cherchée.

**Q26.** Supposons que  $0 < \lambda < 1$  (l'inégalité est triviale pour  $\lambda = 0$  ou  $1$ )

et posons  $A = \left[\exp\left(\frac{1}{8}d(X'(\omega), C_{-1})^2\right)\right]^{1-\lambda}$ ,  $B = \left[\exp\left(\frac{1}{8}d(X'(\omega), C_1)^2\right)\right]^\lambda$ ,  
 $p = \frac{1}{1-\lambda}$  et  $q = \frac{1}{\lambda}$ .

On a :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $A, B \geq 0$  donc

$$\mathbb{E}(AB) \leq \mathbb{E}(A^p)^{1/p} \mathbb{E}(B^q)^{1/q} \quad (\text{par } \mathbf{Q.6})$$

d'où l'inégalité cherchée.

**Q27.** Soit  $\omega \in \Omega$  tel que  $\varepsilon(\omega) = 1$ . On a :  $X(\omega) = X'(\omega) + e_n$ .

Soit  $x' \in E'$  tel que  $x' \in C_1$  et  $d(X'(\omega), C_1) = \|X'(\omega) - x'\|$ .

D'après **Q19**,  $x' + e_n \in C$  et  $\|X(\omega) - (x' + e_n)\| = \|X'(\omega) - x'\| = d(X'(\omega), C_1)$ ,  
donc  $d(X'(\omega), C_1) \geq d(X(\omega), C)$ , d'où

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \mid \varepsilon_n = 1\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right)\right)$$

Par H.R.  $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_1)^2\right)\right) \cdot p_+ \leq 1$ , d'où l'inégalité cherchée.

**Q28.** Par H.R. on a aussi,  $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)\right) \leq \frac{1}{p_-}$ .

Par **Q.7**, on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \mid \varepsilon_n = 1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \mid \varepsilon_n = -1\right)$$

donc, en utilisant **Q.26** et **27**, on obtient l'inégalité cherchée.

**Q29.** Il suffit de factoriser le second membre de l'inégalité précédente par  $\frac{1}{2p_+}$  et

remplacer  $\frac{p_-}{p_+}$  par  $1 - \lambda$  ( on a bien  $\lambda \in [0, 1[$  ).

**Q30.** Pour  $x \in [0, 1[$ , on pose :  $f(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) - \frac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$ .  
On a :

$$f'(x) = \frac{-x(x^2 + x - 4)}{x^2 - 4} - \ln(1-x) \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{x(x^4 + 24 - 8x(x+1))}{(x^2 - 4)^2(1-x)}$$

Pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $f''(x) \geq 0$  donc  $f'$  est  $\nearrow$  sur  $[0, 1[$  donc, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f'(x) \geq f'(0) = 0$ , donc  $f$  est  $\nearrow$  sur  $[0, 1[$ , d'où pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a  $f(x) \geq f(0) = 0$ .

**Q31.** L'inégalité précédente s'écrit aussi

$$\frac{x^2}{2} + \ln((1-x)^{x-1}) \leq \ln\left(\frac{4}{x-1} - 1\right)$$

En appliquant l'exponentielle, on obtient l'inégalité cherchée.

**Q32.** D'après **Q.29**, **Q.29** et **Q.31**, on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right) \leq \frac{4}{2p_+(2-\lambda)} = \frac{2}{p_+ + p_-} = \frac{1}{\mathbb{P}(X \in C)}$$

**Q33.**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d(X, C) \geq t) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \geq \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)\right) \quad (\text{par bijectivité}) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right)\right)}{\exp\left(\frac{t^2}{8}\right)} \quad (\text{par l'inégalité de Markov}) \\ &\leq \frac{\exp\left(\frac{-t^2}{8}\right)}{\mathbb{P}(X \in C)} \quad (\text{par l'inégalité (II.1)}) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité de Talagrand.

**Q34.** • Soient  $(M, N) \in C^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} g(\lambda M + (1-\lambda)N) &= \|\lambda M + (1-\lambda)N\| \\ &\leq \lambda\|M\| + (1-\lambda)\|N\| \\ &= \lambda g(M) + (1-\lambda)g(N) \\ &\leq \lambda r + (1-\lambda)r = r \end{aligned}$$

- $g$  est continue par composition de la norme  $\|\cdot\|$  (qui est continue car Lipschitzienne) et  $M \mapsto Mu$  (qui est continue car linéaire en dimension finie).
- $C = g^{-1}([0, r])$  est fermé car image réciproque d'un fermé par une application continue.



**Q35.** Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d}$ . On a  $\|M\|_F = \left( \sum_{1 \leq j \leq d} \sum_{1 \leq i \leq k} m_{i,j}^2 \right)^{1/2}$

et  $\|Mu\| = \sum_{1 \leq i \leq k} \left( \sum_{1 \leq j \leq d} m_{i,j} u_j \right)^2$ . Par l'inégalité de Cauchy-schwarz, on a

$$\forall i = 1, \dots, k, \quad \left( \sum_{1 \leq j \leq d} m_{i,j} u_j \right)^2 \leq \sum_{1 \leq j \leq d} m_{i,j}^2 \underbrace{\sum_{1 \leq j \leq d} u_j^2}_{=\|u\|^2=1} = \sum_{1 \leq j \leq d} m_{i,j}^2$$

d'où  $\|Mu\|^2 \leq \|M\|_F^2$ .

**Q36.** Supposons que  $d(M, C) < t$ .

Soit  $N \in C$  tel que  $d(M, C) = \|M - N\|_F$ . On a :

$$\begin{aligned} g(M) &= \|Mu\| \\ &\leq \|(M - N)u\| + \|Nu\| && \text{(par inégalité triangulaire)} \\ &\leq \|M - N\|_F + g(N) && \text{(par définition de } g \text{ et Q.35)} \\ &< t + r && \text{(par définition de } C \text{ et hypothèse)} \end{aligned}$$

**Q37.** Notons que la base canonique  $(E_{i,j})$  de  $E$  est orthonormée relativement au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et que  $X = \sum_{i,j} \varepsilon_{i,j} E_{i,j}$ .

Par **Q36.**, on a :  $(g(X) \geq r + t) \subseteq (d(X, C) \geq t)$ , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g(X) \leq r) \cdot \mathbb{P}(g(X) \geq r + t) &\leq \mathbb{P}(g(X) \leq r) \cdot \mathbb{P}(d(X, C) \geq t) \\ &= \mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(d(X, C) \geq t) && \text{(par définition de } C) \\ &\leq \exp\left(\frac{-t^2}{8}\right) && \text{(par théorème de Talagrand)} \end{aligned}$$

**Q38.** Notons que  $G$  est la fonction de répartition de  $g(X)$ . En utilisant la définition de la limite, on montre que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) = 0$  entraîne que  $G^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$  est minorée et que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = 1$  entraîne que  $G^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$  n'est pas vide. D'où l'existence de

$$m := \inf \left( G^{-1}\left([\frac{1}{2}, 1]\right) \right)$$

Pour tout  $t \geq m$ ,  $G(t) \geq \frac{1}{2}$  donc  $\mathbb{P}(g(X) \leq m) = G(m) = \lim_{t \rightarrow m^+} G(t) \geq \frac{1}{2}$

d'autre part, pour tout  $t < m$ ,  $G(t) < \frac{1}{2}$  donc  $\mathbb{P}(g(X) < m) = \lim_{t \rightarrow m^-} G(t) \leq \frac{1}{2}$

puis  $\mathbb{P}(g(X) \geq m) \geq \frac{1}{2}$ .

**Q39.** On a  $\mathbb{P}(|g(X) - m| \geq t) = \mathbb{P}(g(X) - m \geq t) + \mathbb{P}(g(X) - m \leq -t)$ .

Par **Q37.**, on a

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(g(X) \geq m + t) \leq \mathbb{P}(g(X) \geq m + t) \cdot \mathbb{P}(g(X) \leq m) \leq \exp\left(\frac{-t^2}{8}\right)$$

et aussi

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(g(X) \leq m - t) \leq \mathbb{P}(g(X) \leq m - t) \cdot \mathbb{P}(g(X) \geq m - t + t) \leq \exp\left(\frac{-t^2}{8}\right)$$

d'où l'inégalité cherchée.

**Q40.**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((g(X) - m)^2) &= 2 \int_0^{+\infty} t \mathbb{P}(|g(X) - m| \geq t) dt && (\text{par } \mathbf{Q8.}) \\ &\leq 8 \int_0^{+\infty} t \exp\left(\frac{-t^2}{8}\right) dt && (\text{par } \mathbf{Q39.}) \\ &= 32 \end{aligned}$$

**Q41.** On a :  $g(X)^2 = \|X.u\|^2 = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^d \varepsilon_{i,j} u_j \right)^2$ , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X)^2) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left( \left( \sum_{j=1}^d \varepsilon_{i,j} u_j \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^d \underbrace{\varepsilon_{i,j}^2}_{=1 \text{ p.s.}} u_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < j' \leq d} \varepsilon_{i,j} u_j \varepsilon_{i,j'} u_{j'} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left( \underbrace{\sum_{j=1}^d u_j^2}_{=\|u\|^2=1} \right) + 2 \sum_{1 \leq j < j' \leq d} u_j u_{j'} \mathbb{E} \left( \underbrace{\varepsilon_{i,j} \varepsilon_{i,j'}}_{2 \text{ var indépendantes}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k 1 + 2 \sum_{1 \leq j < j' \leq d} u_j u_{j'} \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_{i,j})}_{\text{nulle}} \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_{i,j'})}_{\text{nulle}} \\ &= k \end{aligned}$$

Pour l'autre partie de la question, le résultat de **Q6.** permet d'écrire :

$$\underbrace{\mathbb{E}(g(X))}_{\text{positive}} = \mathbb{E}(g(X).1) \leq (\mathbb{E}(g(X)^2))^{1/2} \cdot (\mathbb{E}(1))^{1/2} = \sqrt{k}$$

**Q42.**

$$(\sqrt{k} - m)^2 = k - 2\sqrt{k}m + m^2 \leq \mathbb{E}(g(X)^2) - 2m\mathbb{E}(g(X)) + m^2 = (\mathbb{E}(g(X)) - m)^2$$

**Q43.** On pose :  $Y = g(X) - m$  ,  $a = 4$  ,  $b = \frac{1}{8}$  et  $\delta = m - \sqrt{k}$ .

D'après **Q39.**, la variable aléatoire  $Y$  est à queue sous-gaussienne et par **Q40.** et **Q42.**, on a  $|\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{32}$  . On applique l'étude de la partie **I.D** sur  $Y$ , les questions **Q12.** et **Q13.** permettent d'écrire que

$$\forall t \geq 0 , \mathbb{P}(|Y + \delta| \geq t) \leq a \exp(a) \exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right)$$

autrement dit

$$\forall t \geq 0 , \mathbb{P}(|g(X) - \sqrt{k}| \geq t) \leq 4 \exp(4) \exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)$$

**Q44.**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|A_k.u\| - 1 > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(\|A_k.u\| - 1 \geq \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\|X.u\| - \sqrt{k} \geq \varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}(|g(X) - \sqrt{k}| \geq \varepsilon\sqrt{k}) \\ &\leq 4 \exp(4) \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 k}{16}\right) \\ &\leq 4 \exp(4) \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 \frac{160 \ln(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon^2}}{16}\right) \\ &= 4 \exp(4) \delta^{10} \\ &< \delta \cdot \frac{e^4}{2^7} < \delta \cdot \frac{3^4}{2^7} = \delta \cdot \frac{81}{128} < \delta \end{aligned}$$

**Q45.** Pour  $1 \leq i < j \leq N$ , on pose  $u = \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}$ . On a :  $u$  est unitaire et

$$\begin{aligned} \overline{E_{i,j}} &= \{\|A_k.(v_i - v_j)\| > (1 + \varepsilon)\|v_i - v_j\|\} \cup \{\|A_k.(v_i - v_j)\| < (1 - \varepsilon)\|v_i - v_j\|\} \\ &= \{\|A_k.u\| > 1 + \varepsilon\} \cup \{\|A_k.u\| < 1 - \varepsilon\} \\ &= \{\|A_k.u\| - 1 > \varepsilon\} \cup \{\|A_k.u\| - 1 < -\varepsilon\} \\ &= \{\|A_k.u\| - 1 > \varepsilon\} \end{aligned}$$

d'où  $\mathbb{P}(\overline{E_{i,j}}) = \mathbb{P}(\|A_k.u\| - 1 > \varepsilon) < \delta$  ( d'après **Q44.** )

**Q46.** On a :

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} E_{i,j}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \overline{E_{i,j}}\right) \\
&\leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{P}(\overline{E_{i,j}}) \\
&< \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta = \frac{N(N-1)\delta}{2}
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité cherchée.

**Q47.** Si on prend  $\delta$  assez petit et  $k \geq \frac{-160 \ln \delta}{\varepsilon^2}$  (  $C = \frac{-160 \ln \delta}{\ln N}$  convient ), on aura l'existence d'une  $\varepsilon$ -isométrie  $A_k$  pour  $v_1, \dots, v_N$  avec une probabilité assez proche de 1.

Pour vos remarques, contactez moi sur "taoufiki-maths@hotmail.fr"