

X-ENS PC 2024

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES (XEULS)

m.laamoum2@gmail.com ¹

1. PRÉLIMINAIRES

(1) Soit $R \in O_d(\mathbb{R})$ donc $R^\top R = I_d$, par suite

$$\det(R^\top R) = \det(R^\top) \det(R) = \det(R)^2 = 1$$

Ainsi $\boxed{\det(R) \in \{-1, +1\}}$.

(2) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\langle A, B \rangle &= \text{tr}(A^\top B) \\ &= \sum_{j=1}^d (A^\top B)_{jj} \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d (A^\top)_{ji} B_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d A_{ij} B_{ij}\end{aligned}$$

c'est l'expression du produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

(3)

a) Soient $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

$$\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i=1}^d u_i [Av]_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} u_i v_j$$

on a $uv^\top \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $[uv^\top]_{i,j} = u_i v_j$ donc

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} u_i v_j = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} [uv^\top]_{i,j} = \langle A, uv^\top \rangle$$

ainsi $\boxed{\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A \rangle}$.

b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^d [AB]_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} B_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d B_{ji} A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^d [BA]_{jj} \\ &= \text{tr}(BA)\end{aligned}$$

¹<https://tinyurl.com/2qyzzrbd>

c) Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\langle A, BC \rangle &= \text{tr}(A^\top BC) \\ &= \text{tr}\left(\left(B^\top A\right)^\top C\right) \\ &= \langle B^\top A, C \rangle\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle A, BC \rangle &= \text{tr}(A^\top BC) \\ &= \text{tr}(CA^\top B) \\ &= \text{tr}\left(\left(AC^\top\right)^\top B\right) \\ &= \langle AC^\top, B \rangle\end{aligned}$$

donc $\boxed{\langle A, BC \rangle = \langle B^\top A, C \rangle = \langle AC^\top, B \rangle}$

(4) Soit $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ à coefficients positifs et $R \in \text{O}_d(\mathbb{R})$.

a) $R \in \text{O}_d(\mathbb{R})$ donc les colonnes de R sont orthonormées, pour tout $1 \leq i \leq d$ on a $R_{ii}^2 \leq \sum_{j=1}^d R_{ij}^2 = 1$

ce qui donne $\boxed{|R_{ii}| \leq 1}$.

b) On a : $\langle D, R \rangle = \text{tr}(DR)$ et $[DR]_{ij} = \alpha_i R_{ij}$ donc $\langle D, R \rangle = \sum_{i=1}^d \alpha_i R_{ii}$ comme $\alpha_i \geq 0$ et $|R_{ii}| \leq 1$ pour tout i alors $\langle D, R \rangle \leq \sum_{i=1}^d \alpha_i |R_{ii}| \leq \sum_{i=1}^d \alpha_i$ ainsi $\boxed{\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)}$.

2. ENSEMBLE DES DÉPLACEMENTS DE \mathbb{R}^d .

(5)

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}|\phi_g(a) - \phi_g(b)| &= |Ra + \tau - Rb - \tau| \\ &= |R(a - b)|\end{aligned}$$

R est une matrice de $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ donc elle conserve la norme ce qui donne $\boxed{|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a - b|}$

b) Soient $g = (\tau, R), g' = (\tau', R') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

\Leftarrow) Supposons $g = g'$, alors $\tau = \tau'$ et $R = R'$ donc $\phi_g = \phi_{g'}$

\Rightarrow) Supposons $\phi_g = \phi_{g'}$, alors pour $x = 0_d$, on a :

$$\phi_g(0_{\mathbb{R}^d}) = \phi_{g'}(0_{\mathbb{R}^d}) \text{ donc } \tau = \tau'.$$

On en déduit pour tout x de \mathbb{R}^d , on a $Rx = R'x$ donc $R = R'$ par suite $g = g'$.

Ainsi pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $\phi_g = \phi_{g'}$ si et seulement si $g = g'$.

c) $e = (0_{\mathbb{R}^d}, \text{I}_d)$ est une solution, montrons qu'elle est unique.

Soit (τ, R) tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \phi(x) = x$, en particulier pour $x = 0_{\mathbb{R}^d}$ on a $\phi(0_{\mathbb{R}^d}) = \tau = 0_{\mathbb{R}^d}$, par suite $\forall x \in \mathbb{R}^d, \phi(x) = Rx = x$ donc $R = \text{I}_d$, d'où $(\tau, R) = (0_{\mathbb{R}^d}, \text{I}_d)$.

(6)

a) Soit $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g = R'(Rx + \tau) + \tau' = R'Rx + R'\tau + \tau'$$

soit $g'' = (R'\tau + \tau', R'R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ donc $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$.

L'unicité découle de la question 5.b . On note $\boxed{g'g = (R'\tau + \tau', R'R)}$.

b) Soit $g_1, g_2, g_3 \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, posons $g_1 = (\tau_1, R_1)$, $g_2 = (\tau_2, R_2)$ et $g_3 = (\tau_3, R_3)$, on a

$$g_2g_3 = (R_2\tau_3 + \tau_2, R_2R_3) \text{ et } g_1(g_2g_3) = (R_1(R_2\tau_3 + \tau_2) + \tau_1, R_1R_2R_3)$$

et

$$g_1g_2 = (R_1\tau_2 + \tau_1, R_1R_2) \text{ et } (g_1g_2)g_3 = (R_1R_2\tau_3 + R_1\tau_2 + \tau_1, R_1R_2R_3)$$

ce qui donne $\boxed{g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3}$

(7) Soit $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

a) Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\phi_g(x) = y \iff Rx + \tau = y \iff x = R^{-1}(y - \tau) \iff x = R^\top(y - \tau)$$

l'équation $\phi_g(x) = y$ admet une solution unique donc ϕ_g est bijective.

b) Soit $g' = (-R^\top\tau, R^\top) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, la question précédente donne pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\phi_g(x) = y \iff x = \phi_{g'}(y)$$

d'où g' est l'unique élément de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$.

Notons $g^{-1} = (-R^\top\tau, R^\top)$.

c) Soit $g = (\tau, R)$ on a $e = (0_{\mathbb{R}^d}, I_d)$ donc

$$ge = (R0_{\mathbb{R}^d} + \tau, RI_d) = (\tau, R) = g$$

et

$$eg = (I_d\tau + 0_{\mathbb{R}^d}, I_dR) = (\tau, R) = g$$

d'où $\boxed{ge = eg = g}$

Et on a

$$gg^{-1} = (R(-R^\top\tau) + \tau, RR^\top) = (-I_d\tau + \tau, I_d) = (0, I_d) = e$$

de même

$$g^{-1}g = (R^\top\tau - R^\top\tau, R^\top R) = (0, I_d) = e$$

d'où $\boxed{gg^{-1} = g^{-1}g = e}$

(8) Soit $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\begin{aligned} gg' &= g'g \iff \phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{g'} \circ \phi_g \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^d, R'Rx + R'\tau + \tau' = RR'x + R\tau' + \tau \end{aligned}$$

Pour $x = 0$ on trouve $R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau$ donc

$$\begin{aligned} (gg' = g'g) &\Rightarrow (R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}^d, R'Rx = RR'x) \\ &\Rightarrow (R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau) \text{ et } (R'R = RR') \end{aligned}$$

la réciproque est évidente , ainsi

$$gg' = g'g \iff (R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau) \text{ et } (R'R = RR') \quad (1)$$

Si $d \geq 2$, dans $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ il existe $R' \neq I_d$, soit $\tau \in \mathbb{R}^d$ tel que $R'\tau \neq \tau$, prenons $g = (\tau, I_d)$ et $g' = (0, R')$ alors $gg' \neq g'g$.

Si $d = 1$ alors $\text{SO}_d(\mathbb{R}) = \{1\}$ la condition (1) est vérifiée et pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ $gg' = g'g$.

Ainsi $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ est commutatif si et seulement si $d = 1$.

3. DISTANCE À DÉPLACEMENT PRÈS

(9)

a) Soient $g = (\tau, R), g' = (\tau', R') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{z} = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot \mathbf{z}) &= \phi_g((g' \cdot \mathbf{z})_i)_{1 \leq i \leq n} \\ &= [\phi_g(\phi_{g'}(z_i))]_{1 \leq i \leq n} \\ &= [\phi_g \circ \phi_{g'}(z_i)]_{1 \leq i \leq n} \\ &= [\phi_{gg'}(z_i)]_{1 \leq i \leq n} \\ &= (gg') \cdot \mathbf{z} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{g \cdot (g' \cdot \mathbf{z}) = (gg') \cdot \mathbf{z}}$

b) Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Supposons que $\mathbf{x} = g \cdot \mathbf{y}$. La question 9.a et le fait que $g^{-1}g = e$ donnent

$$g^{-1} \cdot \mathbf{x} = g^{-1} \cdot (g \cdot \mathbf{y}) = (g^{-1}g) \cdot \mathbf{y} = e \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}$$

ainsi $\boxed{\mathbf{y} = g^{-1} \cdot \mathbf{x}}$

(10)

a) Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

On a

$$\|g \cdot \mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)|^2}$$

Puis par la question 5.a, on a pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$|\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)| = |y_i - x_i|$$

Donc :

$$\|g \cdot \mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2} = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

b) Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

Posons $\mathbf{z} = g^{-1} \cdot \mathbf{y}$, alors $\mathbf{y} = g \cdot \mathbf{z}$, de la question précédente on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| &= \|g \cdot \mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \\ &= \|g^{-1} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{x} - g^{-1} \cdot \mathbf{y}\| \end{aligned}$$

or l'application $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \\ g \mapsto g^{-1} \end{array} \right.$ est bijective, alors

$$\begin{aligned} \{\|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\} &= \{\|\mathbf{x} - g^{-1} \cdot \mathbf{y}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\} \\ &= \{\|\mathbf{x} - g \cdot \mathbf{y}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\} \end{aligned}$$

on en déduit que $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

c) Soient $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$ et $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

Écrivons

$$\|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| = \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y} + (gg') \cdot \mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\|$$

l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|(gg') \cdot \mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| \\ &\leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|g(g' \cdot \mathbf{y}) - g \cdot \mathbf{x}\| \quad (\text{voir la question 6.}) \\ &\leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|g' \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}\| \quad (\text{d'après la question 10.b}) \end{aligned}$$

d) D'après la question précédente on a pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x} - g' \cdot \mathbf{y}\|$$

donc

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x} - g' \cdot \mathbf{y}\|$$

soit $g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ prenons $g = g''(g')^{-1}$ alors

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \|\mathbf{z} - g'' \cdot \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x} - g' \cdot \mathbf{y}\|$$

cette relation étant valable pour tout $g', g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, fixons g' alors

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \|\mathbf{x} - g' \cdot \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{z} - g'' \cdot \mathbf{y}\|$$

$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \|\mathbf{x} - g' \cdot \mathbf{y}\|$ est un minorant de $\{\|\mathbf{z} - g'' \cdot \mathbf{y}\| \mid g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\}$ par suite

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \|\mathbf{x} - g' \cdot \mathbf{y}\| \leq \inf \{\|\mathbf{z} - g'' \cdot \mathbf{y}\| \mid g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\}$$

(car l'inf est le plus grand des minorants) donc

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{x} - g' \cdot \mathbf{y}\|$$

par suite $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \delta(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ est un minorant de $\{\|\mathbf{y} - g' \cdot \mathbf{x}\| \mid g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\}$ donc

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \delta(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq \inf \{\|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\}$$

ainsi $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

(11) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note $c(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) \mid \exists g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d), g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.

a) Supposons que $c(\mathbf{x}) \cap c(\mathbf{y}) \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{z} \in c(\mathbf{x}) \cap c(\mathbf{y})$.

Par conséquent, il existe $g_1, g_2 \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tels que : $\mathbf{z} = g_1 \cdot \mathbf{x} = g_2 \cdot \mathbf{y}$ donc

$$\mathbf{x} = g_1^{-1}(g_2 \cdot \mathbf{y}) = (g_1^{-1}g_2) \cdot \mathbf{y} \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = g_2^{-1}(g_1 \cdot \mathbf{x}) = (g_2^{-1}g_1) \cdot \mathbf{x} \quad (2)$$

• Montrons que $c(\mathbf{x}) \subset c(\mathbf{y})$: Soit $\mathbf{t} \in c(\mathbf{x})$, donc il existe $f \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $f \cdot \mathbf{x} = \mathbf{t}$, par la relation (1) on a

$$\mathbf{t} = f \cdot \left((g_1^{-1} g_2) \cdot \mathbf{y} \right) = \left(f \left(g_1^{-1} g_2 \right) \right) \cdot \mathbf{y}$$

comme $f \left(g_1^{-1} g_2 \right) \in \text{Dep} \left(\mathbb{R}^d \right)$ alors $\mathbf{t} \in c(\mathbf{y})$ et $c(\mathbf{x}) \subset c(\mathbf{y})$.

- Montrons que $c(\mathbf{y}) \subset c(\mathbf{x})$: De la même manière, la relation (2) donne le résultat.

La double inclusion donne $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$.

b) Supposons que $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$. En prenant $g = e$, on a $\mathbf{x} \in c(\mathbf{x})$ et $\mathbf{y} \in c(\mathbf{y})$, donc $\mathbf{x} \in c(\mathbf{y})$ et $\mathbf{y} \in c(\mathbf{x})$, ainsi il existe $g' \in \text{Dep} \left(\mathbb{R}^d \right)$ tel que $\mathbf{y} = g' \cdot \mathbf{x}$, donc $0 \in \left\{ \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep} \left(\mathbb{R}^d \right) \right\}$, ce qui prouve que $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

4. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

On fixe dans cette partie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et on introduit pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep} \left(\mathbb{R}^d \right)$

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - (R\mathbf{x}_i + \tau)|^2 = \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\|^2$$

où $g = (\tau, R)$.

(12) On note $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ et $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i$.

Rappelons que pour tous u et v dans \mathbb{R}^d :

- $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top v$.
 - $|u|^2 = \langle u, u \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top u$.
 - $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^d}$.
- a)** Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}_i - (R\mathbf{x}_i + \tau)|^2 &= |[\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})] + [\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau]|^2 \\ &= |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2 + |\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2 + 2\langle \mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau \rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

remarquons que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau \rangle_{\mathbb{R}^d} &= \left\langle \sum_{i=1}^n [\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})], \bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i - n\bar{\mathbf{y}} - R \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - n\bar{\mathbf{x}} \right), \bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

comme $\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i - n\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - n\bar{\mathbf{x}} = 0$ alors $\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$, ce qui donne

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2 + n|\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2 \quad (1)$$

b) Soit $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, la relation (1) s'écrit

$$J(\tau, R) = J(\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}}, R) + n|\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2 \quad (2)$$

donc

$$J(\tau, R) \geq J(\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}}, R)$$

ainsi l'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ \tau \mapsto J(\tau, R) \end{array} \right.$ admet un minimum, en $\tau(R) = \bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}}$. La relation (2) devient

$$J(\tau, R) = J(\tau(R), R) + n|\tau(R) - \tau|^2$$

Si $\tau \neq \tau(R)$ alors $n|\tau(R) - \tau|^2 > 0$ et $J(\tau, R) > J(\tau(R), R)$, d'où l'unicité de $\tau(R)$ comme minimum .

Ce qui prouve que l'application $\begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ \tau \mapsto J(\tau, R) \end{cases}$ a un unique minimum en $\tau(R) = \bar{y} - R\bar{x}$.

(13) On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de la topologie associée à la norme $\|M\| = \sqrt{\langle M, M \rangle}$.

$$\text{a) Soit } g : \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \\ M \mapsto (M^\top, M) \end{cases} \text{ et } h : \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ (A, B) \mapsto AB \end{cases}$$

On a $f = hog$, f est continue car g est linéaire en dimensions finies et h est bilinéaire en dimensions finies donc elles sont continues .

b)

• On a $\text{SO}_d(\mathbb{R}) = \text{O}_d(\mathbb{R}) \cap \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$, $\text{O}_d(\mathbb{R}) = f^{-1}\{\text{I}_d\}$, c'est l'image réciproque du fermé $\{\text{I}_d\}$ par f qui est continue donc c'est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$ est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par \det qui est continue, car polynomiale, donc c'est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

$\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est intersection de deux fermés donc il est fermé dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

• Si $M \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, alors :

$$\|M\| = \sqrt{\langle M, M \rangle} = \sqrt{\text{tr}(M^\top M)} = \sqrt{d}$$

Donc $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est borné

Ainsi $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ donc il est compact.

(14)

$$\text{a) Considérons l'application } f : \begin{cases} \text{SO}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ R \mapsto J(\tau(R), R) \end{cases} .$$

avec $\tau(R) = \bar{y} - R\bar{x}$ et $J(\tau(R), R) = \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2$.

f est donc continue, $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fermé borné, en dimension finie , donc il est compact , par conséquent f est bornée sur $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ et atteint ses bornes . Donc il existe $R_* \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que

$$J(\tau(R_*), R_*) = \inf_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R)$$

et d'après la question 12.b on a pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $J(\tau(R), R) \leq J(\tau, R)$.

On en déduit qu'il existe $R_* \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que $J(\tau(R_*), R_*) \leq J(\tau, R)$ pour tout $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

b) Prenons le cas ou, pour tout $1 \leq k \leq d$, $x_k = y_k = 1$ alors $J(\tau(R), R) = 0$, qui est la valeur minimale , elle est atteinte en toute matrice R et R_* n'est pas forcément unique.

(15) Soit $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} J(\tau(R), R) &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (|y_i - \bar{y}|^2 + |R(x_i - \bar{x})|^2) - 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

$R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, elle conserve la norme donc $|R(x_i - \bar{x})|^2 = |x_i - \bar{x}|^2$ pour tout i et d'après la question 3a on a $\langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle [(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top], R \rangle$ pour tout i , ce qui donne

$$\begin{aligned} J(\tau(R), R) &= \sum_{i=1}^n (|y_i - \bar{y}|^2 + |x_i - \bar{x}|^2) - 2 \sum_{i=1}^n \langle [(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top], R \rangle \\ &= nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \left\langle \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top, R \right\rangle \end{aligned}$$

posons $Z(x, y) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top$ donc

$$J(\tau(R), R) = nV_n(y) + nV_n(x) - 2\langle Z(x, y), R \rangle$$

la continuité du produit scalaire et la compacité de $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ assure l'existence de $\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \delta(x, y)^2 &= \inf_{(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)} J(\tau, R) \\ &= \inf_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{\delta(x, y)^2 = nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle .}$$

5. CALCUL DE $\delta(x, y)$ DANS LE CAS OÙ $\det(Z(x, y)) > 0$.

(16) Soit $Z \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ inversible et $S = Z^\top Z$.

Montrons que S est symétrique définie positive

- La matrice $S = Z^\top Z$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée, il existe donc une base orthonormée (u_1, \dots, u_d) de \mathbb{R}^d formée de vecteurs propres de S et il existe une famille de valeurs propres réelles telle que $Su_i = \lambda_i u_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

Quitte à changer les indices on peut supposer que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$x^\top Sx = x^\top Z^\top Zx = (Zx)^\top (Zx) = |Zx|^2$$

donc $x^\top Sx \geq 0$ et

$$\begin{aligned} x^\top Sx = 0 &\iff |Zx| = 0 \\ &\iff Zx = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ (car } Z \text{ est inversible)} \end{aligned}$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}, x^\top Sx > 0$.

S est symétrique définie positive donc $Sp(S) \subset \mathbb{R}^{*+}$, d'où il existe une famille décroissante $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ de réels strictement positifs et une base orthonormée (u_1, \dots, u_d) de \mathbb{R}^d telle que $Su_i = \lambda_i u_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

(17) On considère $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Zu_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

a) Soit $1 \leq i, j \leq d$, on a

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} &= v_i^\top v_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (Zu_i)^\top (Zu_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^\top Su_j \end{aligned}$$

or $Su_j = \lambda_j u_j$ donc

$$\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} u_i^\top u_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

Puisque $(u_i)_{1 \leq i \leq d}$ est orthonormée alors $\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Par suite la famille $(v_i)_{1 \leq i \leq d}$ est orthonormée, donc elle est libre, de plus elle est de cardinal d , ce qui prouve que $(v_i)_{1 \leq i \leq d}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^d .

b) Soit $U = (u_1 | \dots | u_d)$, $V = (v_1 | \dots | v_d)$ et $D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$ on a

$$\begin{aligned} ZU &= (Zu_1 | \dots | Zu_d) \\ &= (\sqrt{\lambda_1}v_1 | \dots | \sqrt{\lambda_d}v_d) \\ &= VD \end{aligned}$$

(Car pour toute matrice A , $DA = (\sqrt{\lambda_i}A_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ et $AD = (\sqrt{\lambda_j}A_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$)

$U \in O_d(\mathbb{R})$, donc U est inversible d'inverse U^\top alors $Z = VDU^\top$

(18) Soit $Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

- $S_1 = Z_1^\top Z_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $S_2 = Z_2^\top Z_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(19) On suppose que $\det(Z) > 0$.

a) Supposons que $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$:

- Montrons que $V^\top RU \in O_d(\mathbb{R})$:

Les familles de colonnes de U et de V sont orthonormées donc $U, V \in O_d(\mathbb{R})$ et $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R}) \subset O_d(\mathbb{R})$. $(O_d(\mathbb{R}), \times)$ est un sous groupe de $(\text{GL}_d(\mathbb{R}), \times)$ donc : $V^\top RU = V^{-1}RU \in O_d(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\det(V^\top RU) = 1$.

On a : $\det(V^\top RU) = \det(V) \det(R) \det(U)$

et $\det R = 1$ donc $\det(V^\top RU) = \det(V) \det(U)$.

La relation $Z = VDU^\top$ donne $\det(Z) = \det(U) \det(V) \det(D)$

, avec $\det(D) = \prod_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} > 0$ et comme $\det(Z) > 0$, alors $\det(U) \det(V) > 0$.

La matrice $UV \in O_d(\mathbb{R})$ donc $\det(UV) \in \{-1, 1\}$, comme $\det(UV) = \det(U) \det(V) > 0$ alors $\det(U) \det(V) = 1$ d'où $\det(V^\top RU) = \det(V) \det(U) = 1$.

On en déduit que $V^\top RU \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$.

b) Soit $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle Z, R \rangle &= \text{tr}(R^\top Z) \\ &= \text{tr}(R^\top VDU^\top) \\ &= \text{tr}(U^\top R^\top VD) \\ &= \text{tr}\left(\left(V^\top RU\right)^\top D\right) \end{aligned}$$

donc $\langle Z, R \rangle = \langle V^\top RU, D \rangle$, de plus l'application $\begin{cases} \text{SO}_d(\mathbb{R}) & \longrightarrow \text{SO}_d(\mathbb{R}) \\ R & \longmapsto V^\top RU \end{cases}$ est bien définie, d'après a), et elle est bijective donc $V^\top RU$ décrit $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ quand R décrit $\text{SO}_d(\mathbb{R})$, ce qui donne

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle$$

(20) Pour $Z = Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, on définit les valeurs singulières $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$ et la matrice D .
D'après la question 4.b on a $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)$ et si $R = I_d$ alors $\langle D, R \rangle = \text{tr}(R^\top D) = \text{tr}(D)$ par suite

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}), R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle = \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}$$

D'après la question 15 $\delta(x, y)^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}), R \rangle$

ainsi
$$\delta(x, y) = \left(nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. LE CAS OÙ $\det(Z(x, y)) < 0$.

On considère $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$.

(21)

a) Soit λ valeur propre de R et x un vecteur propre associé, R est la matrice d'une isométrie qui conserve la norme donc

$$|Rx| = |\lambda||x| = |x|$$

x est non nul par suite $|\lambda| = 1$ et $\lambda \in \{+1, -1\}$.

b) On a $R + I = R + RR^\top = R(I + R^\top)$, donc $\det(R + I) = \det(R) \det(I + R^\top)$.

c) Supposons que $\det(R) = -1$ alors

$$\det(R + I) = -\det(I + R^\top) = -\det((I + R)^\top) = -\det(R + I)$$

d'où $\det(R + I) = 0$

(22) On suppose que $\det(R) = -1$.

a) On a donc $\det(R + I) = 0$, ce qui signifie que -1 est une valeur propre de R .

Notons u_d le vecteur propre associé à -1 de norme 1, $|u_d| = 1$, en suite on le complète, par u_1, \dots, u_{d-1} , en une base orthonormée (u_1, \dots, u_d) , de \mathbb{R}^d .

On a $Ru_d = -u_d$ et $RR^\top = I$ donc

$$u_d = R^\top Ru_d = R^\top (Ru_d) = R^\top (-u_d)$$

par suite $R^\top u_d = -u_d$ et $u_d^\top R = -u_d^\top$.

Soit $x \in E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1}) = (\mathbb{R}u_d)^\perp$, donc

$$u_d^\top Rx = -u_d^\top x = -\langle u_d, x \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$$

Ainsi il existe une base orthonormée (u_1, \dots, u_d) de \mathbb{R}^d telle que l'on a $Ru_d = -u_d$ et $u_d^\top Rx = 0$ pour tout $x \in E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1})$.

b) Soit $x \in E_1$ on a $u_d^\top Rx = \langle u_d, Rx \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$, donc $Rx \in (\mathbb{R}u_d)^\perp = E_1$, ce qui donne $R(E_1) \subset E_1$.
 R est inversible donc $\dim R(E_1) = \dim E_1$ d'où $R(E_1) = E_1$.

Soit $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_i \geq 0$ décroissants. On note $U = (u_1 | \dots | u_d)$.

(23)

a) D'après 3.c, pour tous A, B et C dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\langle B, AC^\top \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle BC, A \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle C, B^\top A \rangle$$

On a $U \in O_d(\mathbb{R})$, donc $UU^\top = I_d$ et

$$\langle D, R \rangle = \langle D, RUU^\top \rangle$$

l'égalité (1) donne

$$\langle D, R \rangle = \langle DU, RU \rangle$$

de même

$$\langle DU, RU \rangle = \langle UU^\top DU, RU \rangle$$

l'égalité (2) donne

$$\langle D, R \rangle = \langle U^\top DU, U^\top RU \rangle$$

D'où $\langle D, R \rangle = \langle S, R' \rangle$ avec $R' = U^\top RU$ et $S = U^\top DU$.

Remarquons que $R' \in O_d(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$.

b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à R .

D'après 22.b on a : $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_d)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^d , $f(u_d) = -u_d$ et $f(E_1) = E_1$.

U est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^d vers \mathcal{B} , donc $R = U \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot U^\top$ par suite $R' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, et on a

$$R' = \left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & \dots & u_{d-1} & u_d \\ \hline & R_0 & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{d-1} \\ u_d \end{matrix}$$

Comme $R' \in O_d(\mathbb{R})$, $R'^\top R' = I_d$, alors $R_0^\top R_0 = I_{d-1}$ et $R_0 \in O_{d-1}(\mathbb{R})$.

(24)

a) On a

$$\langle D, R \rangle = \langle S, R' \rangle = \text{tr}(S^\top R')$$

écrivons le produit par blocs :

$$S^\top R' = \left(\begin{array}{c|c} S_0^\top & A \\ \hline B & S_{dd} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} R_0 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} S_0^\top R_0 & A' \\ \hline B' & -S_{dd} \end{array} \right)$$

donc $\langle D, R \rangle = \text{tr}(S^\top R') = \text{tr}(S_0^\top R_0) - S_{dd}$, or S est symétrique réelle et donc S_0 l'est aussi d'où

$$\boxed{\langle D, R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{dd}}.$$

b) On a S_0 est symétrique réelle, donc par le théorème spectral il existe D_0 une matrice diagonale et $P \in O_{d-1}(\mathbb{R})$ telles que $S_0 = P^\top D_0 P$, donc :

$$\text{tr}(S_0 R_0) = \text{tr}(P^\top D_0 P R_0) = \text{tr}(D_0 P R_0 P^\top)$$

et $P R_0 P^\top \in O_{d-1}(\mathbb{R})$, la question 4.b donne $\text{tr}(D_0 (P R_0 P^\top)) \leq \text{tr}(D_0)$ or $\text{tr}(D_0) = \text{tr}(S_0)$ donc

$$\boxed{\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(S_0)}.$$

c)

- On a $\text{tr}(S) = \text{tr}(S_0) + S_{dd}$, or $S = U^\top DU$ donc $\text{tr}(S) = \text{tr}(D)$ ce qui donne $\text{tr}(S_0) + S_{dd} = \text{tr}(D)$.
- Les questions a. et b. donnent

$$\langle D, R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{dd} \leq \text{tr}(S_0) - S_{dd}$$

et $\text{tr}(S_0) = \text{tr}(D) - S_{dd}$, d'où $\boxed{\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{dd}}$.

(25)

a) On a $U = (U_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ et $S = U^\top D U$, ce qui donne

$$\begin{aligned} S_{dd} &= \left[(U^\top D) U \right]_{d,d} \\ &= \sum_{i=1}^d \left[U^\top D \right]_{d,i} U_{i,d} \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \left[U^\top \right]_{d,j} D_{j,i} \right) U_{i,d} \end{aligned}$$

or $\left[U^\top \right]_{d,j} = U_{j,d}$ et $D_{j,i} = \alpha_j \delta_{i,j}$ donc

$$\begin{aligned} S_{dd} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d U_{j,d} (\alpha_j \delta_{i,j}) U_{i,d} \\ &= \sum_{j=1}^d \alpha_j U_{j,d}^2 \end{aligned}$$

b) On a $U \in O_d(\mathbb{R})$ donc $U U^\top = I_d$, le coefficient d'ordre (d, d) de $U U^\top$ s'écrit

$$\left[U U^\top \right]_{dd} = \sum_{i=1}^d U_{id}^2 = 1$$

on sait que les α_i sont décroissants donc :

$$S_{dd} = \sum_{j=1}^d \alpha_j U_{jd}^2 \geq \alpha_d \sum_{j=1}^d U_{jd}^2 = \alpha_d$$

d'après la question 24.c on a :

$$\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{dd} \leq \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i \right) - 2\alpha_d$$

on en déduit que $\langle D, R \rangle \leq \left(\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i \right) - \alpha_d$.

(26) Cas où $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) < 0$.

On l'utilise la même démarche que la partie 5. Pour $Z = Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, on définit les valeurs singulières $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$ et la matrice $D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$.

D'après la question 15 on a

$$\delta(x, y)^2 = nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle.$$

D'après la question 19.b, si $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, on a $Z = V D U^\top$ et $\langle Z, R \rangle = \langle V^\top R U, D \rangle$.

$\det(Z) < 0$ donc $\det(V) \det(U^\top) < 0$ par suite $V^\top R U$ décrit $O_d(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_d(\mathbb{R})$ quand R décrit $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ ce qui donne

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}), R \rangle = \sup_{R \in O_d(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle$$

D'après la question 25. $\langle D, R \rangle \leq \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} \right) - \sqrt{\lambda_d}$ et pour la matrice $R_0 = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1)$ on a égalité, ce qui donne

$$\delta(x, y) = \left(nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_d} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$