CCMP — PSI — Mathématiques 2 — 2025 — Corrigé

Le sujet étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(E)\colon\ y'(x)+y(x)+1=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y(x)},$$

dont l'inconnue est une fonction $y\colon \mathbb{R}_+\to R$. On admet que l'équation différentielle (E) admet une unique solution $y\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,R)$ vérifiant la condition initiale $y(0)=0$.

I. Linéarisation de (E)

Soit $(E_\ell)\colon\ u'(x)+u(x)+1=\dfrac{1}{2}(1+u(x))$ l'équation linéarisée (à l'origine) avec la condition initiale $u(0)=0$.

Q 1. L'équation (E_ℓ) se réécrit $2u'+u+1=0$, équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions forme une droite affine dirigée par une solution non nulle de l'équation homogène et passant par une solution particulière. La fonction $u(x)=-1$ est solution évidente de l'équation et l'équation homogène a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x\longmapsto \kappa\mathrm{e}^{-x/2}$, avec $\kappa\in\mathbb{R}$. La fonction $y(x)=\kappa\mathrm{e}^{-x/2}-1$ s'annule en 0 pour $\kappa=1$ et l'on a donc $u(x)=\mathrm{e}^{-x/2}-1$. Les variations sont immédiates et ne nécessitent pas de dérivation :

x	0	$+\infty$
f	0 ↘	-1

Q 2. On a trouvé l'unique solution constante à la question précédente et l'on a $\gamma=-1$. Le tableau de variations donnait aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\gamma=-1$.

Q 3. Revenons à l'équation (E) et à sa solution y s'annulant en 0. En reportant $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=c$ dans l'équation, la linéarité de la limite donne $\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^c}{2}-c-1=2c'$. Si $c'>0$, il existe $x_0\in\mathbb{R}_+$ tel que $f'(x)\geqslant c'$, d'où

$$\forall x\geqslant x_0\colon\ f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\geqslant f(x_0)+c'(x-x_0)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty,$$

ce qui contredirait que f admet une limite finie en l'infini. En considérant $-f$ (ou en renversant les inégalités), on montre de même que l'hypothèse $c'<0$ est absurde. On a donc $c'=0$, ce qui montre que $x\longmapsto c$ est une solution constante de (E). Pour montrer qu'il y en a exactement deux, on pose $\varphi(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{2}-t-1$, d'où $\varphi'(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{2}-1$, fonction qui s'annule uniquement en $t=\ln 2$. Finalement, on obtient le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	c_1	$\ln 2$	c_2	$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\ln 2$	↗ 0	↗ $+\infty$

L'existence et l'unicité de c_1 et de c_2 sont données par le théorème de la bijection, *via* le fait que la fonction φ est continue et strictement monotone sur les intervalles $]-\infty,\ln 2]$ et $[\ln 2,+\infty[$. On a ainsi $c_1<\ln 2<c_2$. On calcule enfin $\varphi(0)=-\dfrac{1}{2}<0=\varphi(c_1)$, d'où $c_1<0$ en vertu du tableau de variations (qui exprime ici que $\varphi_{|]-\infty,\ln 2]}$ est strictement décroissante).

Enfin, ce qui précède montre que $c\in\{c_1,c_2\}$. Comme y est décroissante et nulle en 0, elle est négative, d'où $c<0$ et, corrélativement, $c=c_1$.

II. Séries de Dirichlet

On appelle *série de Dirichlet* une série de fonctions de la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$ où $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle strictement croissante, divergente telle que $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_n = \mathcal{O}(n)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $2^n|a_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $b_k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k a_n$. Par hypothèse, $\lambda_n = \mathcal{O}(n)$ et $a_n = \mathcal{O}(2^{-n})$, d'où $\lambda_n^k a_n = \mathcal{O}\big(n^k 2^{-n}\big)$. Pour $u_n = n^k 2^{-n}$, on a $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ et la règle de d'Alembert assure convergence absolue de la série $\sum u_n$, d'où celle des séries $\sum \lambda_n^k a_n$. Ainsi la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ est-elle bien définie.

Q 5. Comme $\lambda_n \geqslant 0$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$ est décroissante, d'où $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = |f_n(0)| = |a_n|$. D'après la question précédente pour $k = 0$, la série $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$ converge, ce qui montre la convergence normale de la série de fonctins $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$, ce qui entraîne sa convergence uniforme. Les fonctions f_n étant clairement continue et la continuité étant stable par passage à la limite uniforme, f est continue.

Q 6. On a

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_0 + b_0 \qquad \& \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_{0,n} = a_0,$$

le passage à la limite étant validé par le théorème de la double limite, que l'on peut appliquer grâce à la convergence uniforme. Enfin, le caractère *strictement* croissant de la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ assure que $\lambda_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui entraîne que seule le fonction constante f_0 n'est pas de limite nulle en l'infini.

Q 7. On applique le théorème de dérivation terme à terme dans sa version $\mathcal{C}^\infty$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f_n^{(k)} = (-1)^k \lambda_n^k f_n$, d'où $\left\|f_n^{(k)}\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \lambda_n^k \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \lambda_n^k |a_n|$. D'après la question 4, la série $\sum f_n^{(k)}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente.

Il s'ensuit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \colon\ f^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n^k \mathrm{e}^{-\lambda_n x}.$$

En particulier, $f^{(k)}(0) = (-1)^k b_k$.

Q 8. Supposons que f soit la fonction nulle. Alors, $\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{(\text{Q } 6)}{=} a_0 = 0$. On peut alors écrire

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x} = \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} f_1(x) \quad \text{avec} \quad f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-(\lambda_n - \lambda_1)x}.$$

Il est immédiat que f_1 est une série de Dirichlet au sens défini dans l'énoncé :

- la suite des coefficients devant les exponentielles sont les mêmes que pour f à décalage d'indice près, ce qui n'en modifie pas la propriété asymptotique $a_n = \mathcal{O}(2^{-n})$;
- la suite $(\lambda_n - \lambda_1)_{n\geqslant 1}$ est de premier terme nul, strictement croissante, divergente et un $\mathcal{O}(n)$.

Par ailleurs, f_1 est également la fonction nulle et on peut lui appliquer le même raisonnement qu'à f. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = a_1 = 0$. Par une récurrence immédiate, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

On suppose dans cette partie que la série de Dirichlet $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$ est solution du problème de Cauchy (C). On pose $g(x) = \mathrm{e}^{y(x)}$.

Q 9. Comme on l'a vu à la question 6, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = c_1 = a_0$. Par ailleurs, $b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = y(0) - a_0 = -c_1$.

Q 10. D'après la question 7, $b_1 = -y'(0) = y(0) + 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{y(0)}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Q 11. Notons que, même si l'énoncé suppose que $k \in \mathbb{N}^*$, on a $g(0) = \mathrm{e}^{y(0)} = 1 = d_0$, donc la relation est vraie pour $k = 0$. Pour tout k, posons $d_k = (-1)^k g^{(k)}(0)$. De $g = \mathrm{e}^y$, on tire $g' = y'\mathrm{e}^y = y'g$, d'où, par la formule de Leibniz (les deux fonctions sont indéfiniment dérivables) :

$$g^{(k)} = (g')^{(k-1)} = (y'g)^{(k-1)} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (y')^{(j)} g^{(k-1-j)} \underset{(i=j+1)}{=} \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} y^{(i)} g^{(k-i)} \qquad \therefore$$

$$d_k = (-1)^k g^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (-1)^i y^{(i)}(0) \times (-1)^{k-i} g^{(k-i)}(0)$$

$$\overset{(\text{Q }7)}{=} \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (-1)^i b_i \times (-1)^{k-i} d_{k-i} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i.$$

Q 12. On obtient une relation beaucoup plus simple en utilisant que y est solution de (E). En effet, on écrit alors $g = 2(y' + y + 1)$, d'où

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \colon g^{(k)} = 2\big(y^{(k+1)} + y^{(k)}\big) \qquad \overset{(\text{Q }7)}{\therefore} \qquad d_k = 2(b_k - b_{k+1}).$$

Du coup, on ne comprend pas trop l'intérêt de la question 11...

IV. Approximation de la solution y par troncature

Dans cette partie, on pose

$$\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n, \quad y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_N \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots \beta_{N-1} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

Q 13. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant l'inégalité triangulaire généralisée et la majoration de a_n donnée par l'énoncé,

$$\big|y_N(x) - y(x)\big| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x} \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M}{2^n} = \frac{M}{2^N}.$$

En passant à la borne supérieure pour $x \geqslant 0$, il vient $\|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leqslant M 2^{-N}$.

Comme $\lim M 2^{-n} = 0$, on a $\lim \|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = 0$, ce qui est la définition de la convergence uniforme.

La majoration précédente est obtenue en majorant l'exponentielle par 1. En s'éloignant de 0, on obtient une meilleure majoration. Ainsi, sur $J = [a, +\infty[$ avec $a > 0$, le caractère croissant de la suite $(\lambda_n)_n$ permet de gagner un facteur $\mathrm{e}^{-a\lambda_{N+1}}$, soit $\|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leqslant M \dfrac{\mathrm{e}^{-a\lambda_{N+1}}}{2^N}$.

Q 14. Les N relations $\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n$ ($0 \leqslant k \leqslant N-1$) se traduisent matriciellement par la relation $B = VA$, où

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Q 15. La bien nommée matrice V est la matrice de Vandermonde associée à $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Elle est inversible car les λ_k sont deux à deux distincts (la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ est supposée strictement croissante). Le système $VA = B$ admet donc une unique solution, donnée par $A = V^{-1}B$.

V. Modèle de propagation d'épidémie SIR

Q 16. Puisqu'il est admis que le triplet (S, I, R), qui modélise l'évolution en proportion des trois catégories de population, est l'unique solution du problème de Cauchy décrit, cela entraîne en particulier que ces trois fonctions sont à valeurs dans $[0, 1]$. Cela posé, la première équation de (F) montre que S' est négative, donc que S est décroissante. Ainsi, si $S(0) = S_0 = 0$, S est la fonction nulle.

On pouvait aussi dire, en utilisant aussi la modélisation, que $S_0 = 0$ signifie qu'au départ, toute la population est ou bien infectée, ou bien guérie. Comme on ne peut attraper la maladie qu'une seule fois, personne ne sera jamais susceptible.

Enfin, on pouvait rester dans l'esprit d'une épreuve de mathématiques et regarder de plus près la première équation de (F), qui est une EDL du premier ordre homogène, et s'intègre en $S(x) = S_0 \exp\left(-\int_0^x I(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$. Notons en passant qu'il est très facile de vérifier à partir des équations que $S + I + R = 1$: il suffit de les sommer.

En reportant dans (F), il vient $I' = -I$, d'où $I(x) = I_0\mathrm{e}^{-x}$ et $R(x) = 1 - S(x) - I(x) = 1 - I_0\mathrm{e}^{-x}$.

Q 17. Supposons que $S(0) > 0$ et qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $S(x_0) = 0$. Posons

$$\big(\widetilde{S_0}, \widetilde{I_0}, \widetilde{R_0}\big) = \big(0, I(x_0)\mathrm{e}^{x_0}, 1 - I(x_0)\mathrm{e}^{x_0}\big).$$

La question 16 donne $\widetilde{S}(x) = 0$, $\widetilde{I}(x) = I(x_0)\mathrm{e}^{x_0 - x}$ et $\widetilde{R}(x) = 1 - I(x_0)\mathrm{e}^{x_0-x}$. On a alors $(S_0, I_0, R_0) \neq \big(\widetilde{S_0}, \widetilde{I_0}, \widetilde{R_0}\big)$ et $\big(S(x_0), I(x_0), R(x_0)\big) = \big(\widetilde{S}(x_0), \widetilde{I}(x_0), \widetilde{R}(x_0)\big)$, ce qui est contradictoire avec la caractère disjoint des trajectoires. L'hypothèse est donc absurde et S ne s'annule pas. Donc $S(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

On peut aussi reprendre l'expression intégrale $S(x) = S_0 \exp\left(-\int_0^x I(t)\,\mathrm{d}t\right)$, l'existence de I sur $\mathbb{R}_+$ étant assurée par le théorème admis. Comme $S_0 > 0$, on a donc $S(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Q 18. On suppose toujours que $S(0) > 0$. D'après la question précédente, la fonction $\dfrac{S'}{S}$ est alors toujours définie, S ne s'annulant pas. En utilisant les deux premières équations de (F), il vient

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = I' = IS - I = -S' - I = -S' + \frac{S'}{S}.$$

Pour la fin de cette partie, on prend $S_0 = I_0 = \dfrac{1}{2}$ et $R_0 = 0$. Sur $\mathbb{R}_+$, on pose $h(x) = \ln\left(\dfrac{S(x)}{S_0}\right) = \ln\big(2S(x)\big)$.

Q 19. Posons $\Theta = h' + h + 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^h = \dfrac{S'}{S} + \ln(2S) + 1 - S$. Alors, la question 18 donne $\Theta' = \left(\dfrac{S'}{S}\right)' + \dfrac{S'}{S} - S' = 0$. De plus, la première équation de (F) donne $S'(0) = -I(0)S(0) = -\dfrac{1}{4}$, d'où $h(0) = 0$ et $h'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et, finalement,

$\Theta = \Theta(0) = -\dfrac{1}{2} + 0 + 1 - \dfrac{1}{2} = 0$. On a bien montré que h est solution du problème de Cauchy (C).

Q 20. Pour approcher S, on reprend la somme tronquée y_N introduite au début de la partie IV, et l'on pose

$$\forall x \geqslant 0\colon\ S_N(x) = S_0\,\mathrm{e}^{y_N(x)} = \frac{1}{2}\exp\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}\right).$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à l'exponentielle et en reprenant la majoration de la question 13, puis en utilisant le caractère croissant de l'exponentielle, il vient

$$\begin{aligned}\big|S(x) - S_N(x)\big| = \frac{1}{2}\big|\mathrm{e}^{y(x)} - \mathrm{e}^{y_N(x)}\big| &\leqslant |y(x) - y_n(x)| \sup_{\substack{\min(y_N(x),y(x))\leqslant t\\ \leqslant\max(y_N(x),y(x))}} \mathrm{e}^t\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left\|y - y_N\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right) \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{M}{2^N} \times \mathrm{e}^{2M} = \frac{M\,\mathrm{e}^{2M}}{2^{N+1}}.\end{aligned}$$

VI. Modèle probabiliste

Q 21. Une personne saine rencontre K autres individus de la population. Cela fait $\dbinom{M-1}{K}$ groupes possibles. Parmi ceux-là, $\dbinom{s+i-1}{K}$ ne comptent aucun individu contagieux. On a donc

$$p(i) = 1 - \frac{\binom{s+r-1}{K}}{\binom{M-1}{K}}.$$

Q 22. La famille $\left\{\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\,;\ (s,i,r) \in E\right\}$ forme un système complet d'événements. La définition de l'espérance et la formule des probabilités totales donnent alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=0}^{M} k\,\mathbf{P}(Z = k) &= \sum_{k=0}^{M} k \sum_{(s,i,r)\in E} \mathbf{P}\left[Z = k \,\middle|\, \big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right] \mathbf{P}\left[\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right]\\ &= \sum_{(s,i,r)\in E}\left(\sum_{k=0}^{M} k\,\mathbf{P}\left[Z = k \,\middle|\, \big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right]\right)\mathbf{P}\left[\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right].\end{aligned}$$

Q 23. Les six variables considérées sont bornées (majorées en valeur absolue par M), donc admettent une espérance.

Q 24. Appliquons la formule de la question 22 à $Z = \Delta\tilde R_n$ en notant que, *sachant* $\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)$, la variable aléatoire $\Delta\tilde R_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(i,\rho)$ (en effet, $\Delta\tilde R_n$ compte le nombre d'individus infectés à l'instant n ayant été guéri entre cet instant et le suivant, les guérisons étant indépendantes entre elles et de probabilité individuelle ρ). Ci-dessous, $\mathbf{E}\left(\Delta\tilde R_n = k \mid \big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right)$ désigne l'espérance de $\tilde R_n$ dans l'espace probabilisé muni de la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ conditionnée par l'événement $\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\big)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\Delta\tilde R_n\right) &= \sum_{(s,i,r)\in E}\left(\sum_{k=0}^{M} k\,\mathbf{P}\left[\Delta\tilde R_n = k \,\middle|\, \big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right]\right)\mathbf{P}\left[\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right]\\ &= \sum_{(s,i,r)\in E} \mathbf{E}\left(\Delta\tilde R_n = k \mid \big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right)\mathbf{P}\left[\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right]\\ &= \sum_{(s,i,r)\in E} \rho\, i\,\mathbf{P}\left[\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right] = \rho\sum_{i=0}^{M} i \sum_{\substack{(s,r)\in[\![0,M]\!]^2\\ (s,i,r)\in E}} \mathbf{P}\left[\big(\tilde S_n, \tilde I_n, \tilde R_n\big) = (s,i,r)\right]\\ &= \rho\sum_{i=0}^{M} i\,\mathbf{P}(\tilde I_n = i) = \rho\,\mathbf{E}\left(\tilde I_n\right).\end{aligned}$$

On aurait pu aussi simplifier l'écriture en ne conditionnant que par les valeurs prises par $\tilde{I}_n$, mais ce n'est visiblement pas ce qu'attendait l'énoncé à lire la question suivante.

Q 25. On a vu à la question précédente que $\Delta\tilde{R}_n \geqslant 0$. De manière similaire, $-\Delta\tilde{S}_n$ compte le nombre d'individus ayant contracté la maladie entre les instants n et $n+1$. *Sachant* $\big(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n\big) = (s,i,r)$, la variable aléatoire $-\Delta\tilde{S}_n$ suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\big(s, p(i)\big)$, soit

$$\mathbf{P}\left[\Delta\tilde{S}_n = -k \,\middle|\, \big(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n\big) = (s,i,r)\right] = \binom{s}{k} p(i)^k (1-p(i))^{s-k}.$$

Q 26. On procède comme à la question 24 en concluant par le théorème de transfert.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\Delta\tilde{S}_n\right) &= \sum_{(s,i,r)\in E} \left(\sum_{k=0}^{M} k\,\mathbf{P}\left[\Delta\tilde{S}_n = k \,\middle|\, \big(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n\big) = (s,i,r)\right]\right) \mathbf{P}\left[\big(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n\big) = (s,i,r)\right] \\
&= \sum_{(s,i,r)\in E} \mathbf{E}\left(\Delta\tilde{S}_n = k \,\middle|\, \big(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n\big) = (s,i,r)\right) \mathbf{P}\left[\big(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n\big) = (s,i,r)\right] \\
&= -\sum_{(s,i,r)\in E} s\,p(i)\,\mathbf{P}\left[\big(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n\big) = (s,i,r)\right] = -\sum_{(s,i)\in[\![0,M]\!]^2} s\,p(i) \sum_{\substack{r\in[\![0,M]\!]^2 \\ (s,i,r)\in E}} \mathbf{P}\left[\big(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n\big) = (s,i,r)\right] \\
&= -\sum_{(s,i)\in[\![0,M]\!]^2} s\,p(i)\,\mathbf{P}\left(\tilde{S}_n = s, \tilde{I}_n = i\right) = -\,\mathbf{E}\left[\tilde{S}_n\,p(\tilde{I}_n)\right].
\end{aligned}$$

Comme $\tilde{S}_n + \tilde{I}_n + \tilde{R}_n = M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Delta\tilde{S}_n + \Delta\tilde{I}_n + \Delta\tilde{R}_n = 0$, d'où, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{I}_n\right] = -\,\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{S}_n\right] - \mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right] = \mathbf{E}\left[\tilde{S}_n\,p(\tilde{I}_n)\right] - \rho\,\mathbf{E}\left(\tilde{I}_n\right).$$