

Concours e3a

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Épreuve de MATHÉMATIQUES 2

Flière MP
durée 3 heures

Nota : les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile.

Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer chacun des résultats correspondants aux éléments encadrés dans les énoncés.

SUJET 1

Soit $f(x) = x^x$, x réel > 0 . On peut noter $f^{(n)}(x)$, ou $\frac{d^n f}{dx^n}$, ou $D^n f$ pour la dérivée n -ième de f .

- 1 Dresser un tableau de variations de f , et dessiner sa courbe représentative.
- 2 On pose $c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculer c_1 et c_2 .
- 3 Établir que $y = f(x)$ satisfait à l'équation différentielle $y' = y \ln x + y$.
En déduire la relation $c_{n-1} = \frac{1}{n+1} \left(c_n + \frac{c_{n-1}}{1} - \frac{c_{n-2}}{2} + \frac{c_{n-3}}{3} - \frac{c_{n-4}}{4} + \dots \right)$.
- 4 Démontrer que $|c_n| \leq 1$. Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$?
- 5 Prouver que $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n (x-1)^n$ sur un intervalle J ouvert que l'on précisera.

SUJET 2

Soient $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^n dt$, $L_n(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt$ où n est entier ≥ 1 et s réel > 0 .

- 1 Calculer $L_n(s)$. Comparer alors a_n et I_n .
- 2 Déterminer λ $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- 3 En déduire le rayon de convergence R de $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$.
Cette série entière converge-t-elle en R ? Et en $-R$?
- 4 Établir la relation $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.
- 5 Dresser un tableau de variations de $f(x)$ en précisant si les limites aux bornes sont finies ou non.

SUJET 3

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- 1 Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{E}$ de f .
- 2 Montrer que cette fonction est **strictement** décroissante .
- 3 Déterminer la limite de f pour x tendant vers $+\infty$.
- 4 Prouver que $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ pour x tendant vers 0. [On peut comparer f à une intégrale.]

- 5 Soit $J = \int_1^{+\infty} f(x)dx$. Démontrer que J **existe** et que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

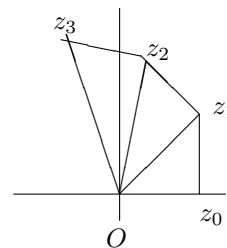
SUJET 4

On définit f , fonction **paire** de période 2π , par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0, \pi]$.

- 1 Cette fonction est-elle C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?
- 2 On cherche la série de Fourier de f , soit $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Calculer a_0 et b_0 .
- 3 On pose $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$. Établir que $G(x) = \frac{1 - \cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1 - \cos(t^2)}{2t^2}dt$. En déduire l'existence de $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$. On admettra que $L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- 4 Déterminer alors une constante D telle que $a_n \sim Dn^{-3/2}$.
- 5 Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

SUJET 5

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on définit la suite de points (z_n) de la façon suivante : $z_0 = 1$, et le triangle $0z_nz_{n+1}$ **rectangle** en z_n , est orienté dans le **sens direct**, avec $|z_{n+1} - z_n| = 1$ [figure ci-contre]. La réunion des segments $[z_n, z_{n+1}]$ constitue donc une ligne polygonale infinie L de forme spirale.



- 1 Calculer $|z_n|$.
- 2 Montrer que le nombre réel $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{\sqrt{k}}$ est un argument possible pour le nombre complexe z_n , $n \geq 1$.
- 3 (3a) Déterminer la **nature** de la série de terme général $u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \arctan(n^{-1/2})$.
 (3b) Établir l'**existence** d'une constante réelle C telle que $\alpha_n = 2\sqrt{n} - C + O(n^{-1/2})$.
 (3c) Démontrer que cette constante C est **strictement positive**.
- 4 On parcourt la ligne polygonale L dans le sens direct à partir de z_0 . Montrer que l'on rencontre la demi-droite $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ en une infinité de points, que l'on appellera successivement $M_0 (= z_0)$, M_1 , M_2 , ..., M_k , ... L'unique arête de la ligne polygonale L qui contient le point M_k , $k \geq 1$, est désignée par $[z_{v(k)-1}, z_{v(k)}]$. Montrer que $v_k \sim k^2\pi^2$ quand k tend vers l'infini.
- 5 Plus précisément, établir que $v(k) = k^2\pi^2 + kC\pi + \beta(k)$ où $\beta(k)$ désigne une suite **bornée**.