

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1987

*
**

EPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES
OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée de l'épreuve 2 heures)

Les candidats sont autorisés à se servir de toutes tables ou instruments de calcul. Ils indiqueront, en tête de leur copie, le matériel utilisé.

Pour les calculs de valeurs approchées, on fournira toutes les justifications utiles pour l'obtention de la précision demandée.

1°) Soit f la fonction d'une variable réelle définie pour tout élément x non nul de $[-1, +1]$ par :

$$f(x) = \frac{\text{Arc sin } x}{x^2}$$

Préciser le domaine de dérivabilité de f et calculer f'

2°) Soit g la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x^3 f'(x) & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier les variations de g .

b) Dédire de l'étude précédente que f' admet dans $]0, 1[$ un zéro unique, noté α , tel que :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$$

c) Dédire de ce qui précède le tableau de variations de f .

3°) a) Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, 1[$ et calculer f'' .

b) Soit h la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$\begin{cases} h(x) = x^4 f''(x) & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Etudier les variations de h .

4°) On pose $\beta = \text{Arc sin } \alpha$.

On se propose de déterminer une valeur approchée de β , à la précision de 10^{-8} , par une méthode itérative.

a) Montrer que β est l'unique solution sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation : $\text{tg } y = 2y$ et donner une valeur approchée de β à la précision 10^{-1} .

b) Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \text{tg}(u_n)$$

Indiquer pourquoi cette méthode ne convient pas pour le but proposé.

- 2 -

- c) On considère la suite (v_n) définie par son premier terme $v_0 = 2$ et par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \text{Arc tg } (2v_n)$$

Montrer que cette suite converge vers β et déterminer un réel $k \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |v_n - \beta| \leq k^n |v_0 - \beta|.$$

En déduire un nombre N d'itérations à partir duquel la précision 10^{-8} est atteinte et déterminer une valeur approchée de β à cette précision.

- d) Déduire de ce qui précède des valeurs approchées de α et de $f(\alpha)$. Quelles sont les précisions obtenues ?

5°) A l'aide des résultats précédents, dessiner soigneusement la courbe représentative de f , dans le plan rapporté à un repère orthonormé (l'unité graphique sera prise égale à 10 cm).

6°) On se propose de déterminer une valeur approchée de β par la méthode de Newton.

- a) Etudier la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(t) = t - \text{Arc tg } (2t)$ et donner l'allure de sa courbe représentative.

- b) Soit ψ la fonction définie par $\psi(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$. Montrer que ψ est définie sur $[1, +\infty[$ et que : $\forall t > \beta \quad \psi(t) > \beta$.

- c) Soit la suite (w_n) définie par son premier terme $w_0 = 1,2$ et par la relation de récurrence :

$$w_{n+1} = \psi(w_n).$$

Montrer que la suite (w_n) est décroissante et converge vers β .

- d) Déterminer, grâce à cet algorithme, une valeur approchée de β à la précision de 10^{-8} . (On déterminera un entier n à partir duquel $\varphi(w_n - 10^{-8}) < 0$).

7°) a) Exprimer en fonction de β la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_{\alpha}^1 f(t) dt.$$

- b) Déterminer une valeur approchée de I à la précision 10^{-7} .
