

# Corrigé<sup>1</sup>

## I Une norme utile sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

I.A - On pourra écrire  $f$  comme la composée de deux fonctions de la façon suivante :

$$f : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}^{d^2} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$$

$$A \longmapsto (A_{1,1} \dots A_{d,d}) \longmapsto P(A)$$

La première application est linéaire en dimension finie donc continue et la deuxième est une fonction vectorielle dont les composantes sont des fonctions polynomiales à  $d^2$ -indéterminées donc continues.

d'où :  $f$  est continue sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ .

I.B - La formule suivante sera très utile ici

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \text{Tr}( {}^t A.B ) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j} B_{i,j}$$

On vérifie aisément les quatre propriétés d'un produit scalaire réel suivantes :

$$- \forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), (A, B) = \text{Tr}( {}^t A.B ) = \text{Tr}( {}^t ( {}^t A.B ) ) = \text{Tr}( {}^t B.A ) = (B, A).$$

$$- \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),$$

$$(\alpha A + A', B) = \text{Tr}( {}^t (\alpha A + A').B ) = \alpha \text{Tr}( {}^t A.B ) + \text{Tr}( {}^t A'.B ) = \alpha(A, B) + (A', B).$$

$$- \forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), (A, A) = \text{Tr}( {}^t A.A ) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (A_{i,j})^2 \geq 0.$$

$$- \forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),$$

$$(A, A) = \text{Tr}( {}^t A.A ) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (A_{i,j})^2 = 0 \implies \forall i, j \in \{1, \dots, d\}, A_{i,j} = 0.$$

$$I.C - \text{On a : } \forall i, j \in \{1, \dots, d\}, (A_{i,j})^2 \leq \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d (A_{k,l})^2 = (A, A) = \|A\|^2$$

$$\text{donc : } \forall i, j \in \{1, \dots, d\}, |A_{i,j}| \leq \|A\|$$

$$I.D - \forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),$$

$$\|A.B\| = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left( \sum_{k=1}^d A_{i,k} B_{k,j} \right)^2$$

1. Auteur Ratbi My Lhassan, CPGE My Youssef, Rabat, Maroc. email : mylhassan@yahoo.fr

On utilise alors l'inégalité de Cauchy Schwartz dans  $\mathbb{R}^d$  muni de son produit scalaire canonique on a :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, d\}, \left| \sum_{k=1}^d A_{i,k} B_{k,j} \right| \leq \left( \sum_{k=1}^d (A_{i,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^d (B_{i,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\|A.B\| \leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left( \sum_{k=1}^d (A_{i,k})^2 \sum_{k=1}^d (B_{i,k})^2 \right)$$

car :  $\sum_{k=1}^d (A_{i,k})^2$  ne dépend pas de  $j$ .

Donc

$$\|A.B\| \leq \left( \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d (A_{i,k})^2 \right) \left( \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d (B_{i,k})^2 \right) = \|A\| \|B\|$$

I.E - Par une récurrence facile on montre que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|A^n\| \leq \|A\|^n$

## II Séries entières de matrices

II.A - On a  $R$  est le rayon de convergence strictement positif, de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

donc :  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \implies \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge absolument.

Soit  $A \in \mathcal{B}$ ,

on a d'une part,  $\|A\| < R$ , donc  $\sum_{n \geq 0} a_n \|A\|^n$  converge absolument.

et d'autre part  $\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n A^n\| \leq |a_n| \|A\|^n$  donc par comparaison des séries à termes positifs on a  $\sum_{n \geq 0} \|a_n A^n\|$  converge, et comme  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est evn de dimension

c'est un Banach donc  $\sum_{n \geq 0} a_n A^n$  converge.

d'où :  $\varphi$  est bien définie sur  $\mathcal{B}$ .

Continuité de  $\varphi$  :

On a

-  $\forall n \in \mathbb{N}, A \mapsto a_n A^n$  est continue sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , (question -I.A).

-  $\sum_{n \geq 0} a_n A^n$  converge normalement donc uniformément sur tout compact  $\overline{\mathcal{B}}(0, r)$ , avec  $r < R$ .

donc  $\varphi$  est continue sur  $\mathcal{B}$ .

II.B - Soit  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , telle que  $\|A\| < R$ ,

II.B - 1) On considère l'ensemble :

$$N = \left\{ k \in \mathbb{N}^*, \text{ la famille } (I_d, A, \dots, A^{k-1}) \text{ soit libre dans } \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \right\}$$

On a  $N$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  ;  $k = 1 \in N$ ,

car pour  $k = 1$  on a  $(I_d, A, \dots, A^{k-1}) = (I_d)$  est libre, puisque  $I_d \neq 0$ . Et de plus  $N$  est majorée par  $d^2$ .

donc  $N$  admet un plus grand éléments qu'on notera  $r$ , d'où  $(A^k)_{0 \leq k \leq r-1}$  est libre et  $(A^k)_{0 \leq k \leq r}$  est liée car  $r + 1 \notin N$ .

II.B - 2) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'existence et l'unicité d'un  $r$ -uplet  $(\lambda_{0,n}, \dots, \lambda_{r-1,n})$  dans  $\mathbb{R}^r$  tel

que  $A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$  signifie que  $A^n \in \text{vect} \{ I_d, A, \dots, A^{r-1} \}$ , avec  $\{ I_d, A, \dots, A^{r-1} \}$  est libre.

Pour  $n \in \{0, \dots, r-1\}$  on a clairement  $A^n \in \text{vect} \{ I_d, A, \dots, A^{r-1} \}$ .

Pour  $n \geq r$  on va montrer par récurrence que  $A^n \in \text{vect} \{ I_d, A, \dots, A^{r-1} \}$ .

Vérification :  $n = r$ .

On a la famille  $(I_d, A, \dots, A^r)$  est liée et la famille  $(I_d, A, \dots, A^{r-1})$  est libre donc  $A^r$  s'écrit combinaison linéaire des vecteurs  $I_d, A, \dots, A^{r-1}$

Soit  $n \geq r$ , on suppose le résultat vrai à l'ordre  $n$  et montrons le à l'ordre  $n + 1$ .

On a  $A^n \in \text{vect}(I_d, A, \dots, A^{r-1})$ , on multiplie par  $A$  on obtient  $A^{n+1} \in \text{vect}(A, \dots, A^r)$

Or  $A^r \in \text{vect}(I_d, A, \dots, A^{r-1})$

Donc :  $\text{vect}(A, \dots, A^r) \subset \text{vect}(I_d, A, \dots, A^{r-1})$

d'où :  $A^{n+1} \in \text{vect}(I_d, A, \dots, A^{r-1})$ .

II.B - 3) On a la famille  $(I_d, A, \dots, A^{r-1})$  est libre donc on peut la compléter en une base  $\beta$  de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  et on considère la norme  $\|\cdot\|_{1,\beta}$  de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ,

c-à-d si  $\forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ,  $\|M\|_{1,\beta} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |m_{i,j}|$  avec  $(m_{i,j})_{i,j}$  les composantes de

$M$  dans la base  $\beta$ .

Et puisque  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est de dimension finie donc toute les normes sont équivalentes en particulier les normes  $\|\cdot\|_{1,\beta}$  et  $\|\cdot\|$  sont équivalentes,

donc : il existe  $C > 0$  telle que  $\forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ,  $\|M\|_{1,\beta} \leq C \|M\|$

pour  $M = A^n$  on a  $\|A^n\|_{1,\beta} = \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C \|A^n\|$ .

II.B - 4) Soit  $k \in \{0, \dots, r-1\}$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|\lambda_{k,n}| \leq \sum_{k'=0}^{r-1} |\lambda_{k',n}| \leq C \|A^n\| \leq C \|A\|^n$ .

donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n \lambda_{k,n}| \leq C |a_n| \|A\|^n$  et comme  $\|A\| < R$  on a  $\sum_{n \geq 0} |a_n| \|A\|^n$  converge, donc par comparaison des séries à termes positifs on a  $\sum_{n \geq 0} a_n \lambda_{k,n}$  converge absolument.

II.B - 5) On a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N a_n A^n = \sum_{n=0}^N a_n \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k = \sum_{k=0}^{r-1} \left( \sum_{n=0}^N a_n \lambda_{k,n} \right) A^k$$

On a  $\sum a_n A^n$  et  $\sum a_n \lambda_{k,n}$  convergent et par opérations sur les limites on a

$$\text{quand } N \text{ tend vers } +\infty : \varphi(A) = \sum_{k=0}^{r-1} \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_{k,n} \right)}_{b_k} A^k = \sum_{k=0}^{r-1} b_k A^k = P(A)$$

avec  $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$

II.B - 6) On a  $\forall n \geq 1, A^n = A$  et  $(I_3, A)$  est libre donc ici  $r = 2$ ,

et  $\forall n \geq 1, \lambda_{0,n} = 0, \lambda_{1,n} = 1, \lambda_{0,0} = 1, \lambda_{1,0} = 0$

par suite on a :  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_{0,n} = a_0 \lambda_{0,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_{0,n} = 1$

et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_{1,n} = a_0 \lambda_{1,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_{1,n} \frac{1}{n!} = e - 1$

d'où :  $P = 1 + (e - 1)X$ .

et on en tire que :

$$\varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A = P(A) = I_3 + (e - 1)A = \begin{bmatrix} 1 & -e + 1 & -e + 1 \\ -e + 1 & 1 & -e + 1 \\ e - 1 & e - 1 & -1 + 2e \end{bmatrix}$$

II.C - Si on suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \varphi(A) = P(A)$ ,

Soit  $\rho \in \mathbb{R}$ , pour  $A = \rho I_d$ , on a  $\varphi(\rho I_d) = P(\rho I_d)$ .

et comme :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\rho I_d)^n = \rho^n I_d$  on a  $\varphi(\rho I_d) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n \right) I_d$  et  $P(\rho I_d) = P(\rho) I_d$

et l'existence de  $\varphi(\rho I_d)$  doit supposé la convergence de  $\sum a_n \rho^n$ .

on a alors :  $\forall \rho \in \mathbb{R}, \varphi(\rho I_d) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n \right) I_d = P(\rho) I_d$ .

d'où :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n = P(\rho)$$

et l'unicité du développement en série entière de la fonction polynomiale  $P$  donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

on conclut que :  $\forall n \geq \deg(P) + 1, a_n = 0$

Réciproquement si :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_0, a_n = 0$

on aura  $\varphi(A) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n A^n = P(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , avec  $P = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n X^n$

Récapitulation : La CNS cherché c'est  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_0, a_n = 0$

### III Deux applications

#### III.A - Première application : une formule de trigonométrie matricielle

III.A - 1) Produit de Cauchy de deux séries : Si  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont deux séries de nombres

complexes absolument convergentes alors la série  $\sum w_n$ , dite produit de Cau-

chy des deux séries, avec  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , est absolument convergente et dans ce cas on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

III.A - 2) On rappelle que : Si  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , la série  $\sum \frac{A^n}{n!}$  dite série exponentielle, est absolument convergente, et sa somme est dite l'exponentielle de  $A$  se note  $\exp(A)$ .

On note  $\sum w_n$  la série produit de Cauchy de  $\sum \frac{(iA)^n}{n!}$  et  $\sum \frac{(iB)^n}{n!}$

on a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n \frac{(iA)^k}{k!} \frac{(iB)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{i^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k A^k B^{n-k} = \frac{i^n}{n!} (A+B)^n$

car  $A$  et  $B$  commutent.

et puisque les deux séries sont absolument convergentes on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} (A+B)^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iA)^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iB)^n}{n!} \right) = \exp(iA) \exp(iB)$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} (A+B)^n = \exp(i(A+B)) = \exp(iA) \exp(iB)$$

III.A - 3) Par opérations sur les séries convergentes dans un evn on a :

$$\cos(A) = \frac{\exp(iA) + \exp(-iA)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \frac{\exp(iA) - \exp(-iA)}{2i}$$

et en utilisant Q-III.A-2) un simple calcul donne :  $\cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_d$ .

### III.B - Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton

Soit  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ,

III.B - 1)  $\forall R > 0$ , on a  $(Re^{i\theta}I_d - A) = (Re^{i\theta})(I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)$  et comme  $Re^{i\theta} \neq 0$  on a  $(Re^{i\theta}I_d - A)$  inversible  $\Leftrightarrow (I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)$  l'est.

on utilise alors la relation :  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,

$$I_d - ((Re^{i\theta})^{-1}A)^N = (I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)(I_d + (Re^{i\theta})^{-1}A + \dots + ((Re^{i\theta})^{-1}A)^{N-1})$$

qui donne :

$$I_d - ((Re^{i\theta})^{-1}A)^N = (I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A) \sum_{n=0}^{N-1} ((Re^{i\theta})^{-1}A)^n \quad (1)$$

On prend alors  $R$  tel que :

$$\|(Re^{i\theta})^{-1}A\| < 1 \Leftrightarrow \|R^{-1}e^{-i\theta}A\| = \frac{\|A\|}{R} < 1 \Leftrightarrow R > \|A\|$$

dans ce on a :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|(Re^{i\theta})^{-1}A\|^n \leq \|((Re^{i\theta})^{-1}A)\|^n$

et comme  $\sum_{n \geq 0} \|((Re^{i\theta})^{-1}A)\|^n$  est convergente car c'est une série géométrique de raison  $\|((Re^{i\theta})^{-1}A)\| < 1$  et par comparaison des séries à termes positifs on a  $\sum_{n \geq 0} ((Re^{i\theta})^{-1}A)^n$  converge absolument donc convergente car on est en dimension finie.

et comme  $\|((Re^{i\theta})^{-1}A)\| < 1$  on a  $((Re^{i\theta})^{-1}A)^N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$

En faisant alors tendre  $N$  vers  $+\infty$  dans (1) on obtient :

$$I_d = (I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A) \sum_{n=0}^{+\infty} ((Re^{i\theta})^{-1}A)^n$$

cette relation suffit de dire dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  que  $(I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)$  est inversible et

$$\text{on a : } (I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} ((Re^{i\theta})^{-1}A)^n$$

on conclut que :  $(Re^{i\theta}I_d - A)$  inversible et

$$(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1}(I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n$$

III.B - 2) On rappelle que :

$$\forall k, k' \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-k')\theta} d\theta = \delta_{k,k'} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq k' \\ 1 & \text{si } k = k' \end{cases}$$

III.B - 3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $R > \|A\|$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta})^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-k} A^k d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} R^{n-1} \left(\frac{A}{R}\right)^k e^{(n-k-1)i\theta} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} R^{n-1-k} A^k \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(n-k-1)i\theta} d\theta}_{\delta_{n-1,k}} \\ &= A^{n-1} \end{aligned}$$

Justification de l'interversion :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, 2\pi], \left\| \left(\frac{A}{R}\right)^k e^{(n-k-1)i\theta} \right\| \leq \left\| \left(\frac{A}{R}\right)^k \right\| \leq \left(\frac{\|A\|}{R}\right)^k$$

et par suite la série de fonctions continues :  $\sum R^{n-1} \left(\frac{A}{R}\right)^k e^{(n-k-1)i\theta}$  converge normalement donc uniformément sur  $[0, 2\pi]$ .

III.B - 4) On a :  $(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} = \frac{1}{\det(Re^{i\theta} I_d - A)} {}^t\text{Com}(Re^{i\theta} I_d - A)$

et comme :  $\det(Re^{i\theta} I_d - A) = (-1)^d \chi_A(Re^{i\theta})$

on a :  $\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} = (-1)^d {}^t\text{Com}(Re^{i\theta} I_d - A)$

par suite :

$$\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) \chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta = (-1)^d \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) {}^t\text{Com}(Re^{i\theta} I_d - A) d\theta$$

On sait que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0$ .

On a les coefficients de  $\text{Com}(Re^{i\theta} I_d - A)$  sont polynomiaux en  $e^{i\theta}$ , d'où les coefficients de la matrice  $\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) {}^t\text{Com}(Re^{i\theta} I_d - A) d\theta$  sont de la forme

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta \text{ et on conclut alors que } \chi_A(A).$$

## IV Étude d'une équation fonctionnelle

IV.A - On fixe  $x, y \in \left] -\infty, \frac{M}{2} \right[ , y \neq \alpha$

On a :  $\forall t \in ]-\infty, \frac{M}{2}[$ ,  $f(2x) = 2f(x+t) - f(2t)$

On intègre les deux fonctions continues  $t \mapsto f(2x)$  et  $t \mapsto 2f(x+t) - f(2t)$  entre  $\alpha$  et  $y$  et on obtient le résultat.

IV.B - On fixe  $y \in ]-\infty, \frac{M}{2}[$ ,  $y \neq \alpha$

On a :  $f$  est continue sur  $] - \infty, M[$ , donc sa primitive  $F$  est de de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, M[$ , donc

$$x \mapsto f(2x) = \frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2x) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y-\alpha}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, \frac{M}{2}[$  donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, M[$ , et donc sa primitive  $F$  est de de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] - \infty, M[$  et par récurrence on montre que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - \infty, M[$

IV.C - On a  $\forall x \in ]-\infty, \frac{M}{2}[$ ,  $f(2x) = \frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y-\alpha}$

en dérivant deux fois cette expression par rapport à  $x$  on a :

$$\forall x \in ]-\infty, \frac{M}{2}[$$
,  $4f''(2x) = \frac{f'(x+y) - f'(x+\alpha)}{y-\alpha}$

ceci est vrai  $\forall y \in ]-\infty, \frac{M}{2}[$ ,  $y \neq \alpha$  et comme  $f$  est deux fois dérivable, le taux d'accroissement  $\frac{f'(x+y) - f'(x+\alpha)}{y-\alpha}$  tend vers  $f''(x+\alpha)$ .

donc :  $\forall x, \alpha \in ]-\infty, \frac{M}{2}[$ ,  $f''(2x) = f''(x+\alpha)$ ,

on prend  $\alpha = x$  on obtient :  $\forall x \in ]-\infty, M[$ ,  $4f''(x) = f''(x)$ . D'où le résultat.

IV.D -  $f'' = 0 \implies \forall x \in ]-\infty, M[$ ,  $f(x) = ax + b$ .

d'où : l'ensemble des solutions de l'équation (IV.1) est  $\text{vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$  c'est un sev de  $\mathcal{C}(] - \infty, M[, \mathbb{R})$  de dimension 2.

## V Étude d'une autre fonction matricielle

V.A - Pour  $d = 1$  la condition

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), A \text{ inversible} \implies f_\zeta(A) = (\zeta(A_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq d} \text{ inversible}$$

devient

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \text{ non nul} \implies \zeta(a) \text{ non nul}$$

donc : les fonctions continues  $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient la condition ci-dessus sont les fonctions continues qui ne s'annulent pas sur  $\mathbb{R}$  sauf peut être en 0, c-à-d les fonctions qui ne s'annulent pas sur  $\mathbb{R}^*$ .

V.B - On notera  $M$  la matrice indiquée dans l'énoncé, un calcul par blocs de déterminant de  $M$  donne  $\det M = ad - bc$ , donc  $M$  inversible signifie  $ad - bc \neq 0$   
D'après la condition

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), A \text{ inversible} \implies f_{\zeta}(A) = (\zeta(A_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq d} \text{ inversible}$$

$ad - bc \neq 0$  implique la matrice  $f_{\zeta}(M) = (\zeta(M_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq d}$  inversible,

$$\text{implique ces deux premières colonnes : } M_1 = \begin{pmatrix} \zeta(a) \\ \zeta(c) \\ \zeta(c) \\ \dots \\ \zeta(c) \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} \zeta(b) \\ \zeta(d) \\ \zeta(d) \\ \dots \\ \zeta(d) \end{pmatrix} \text{ sont}$$

linéairement indépendantes,

implique  $\begin{pmatrix} \zeta(a) \\ \zeta(c) \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \zeta(b) \\ \zeta(d) \end{pmatrix}$  le sont aussi,

car sinon on aura par exemple :  $\begin{pmatrix} \zeta(b) \\ \zeta(d) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \zeta(a) \\ \zeta(c) \end{pmatrix}$  et donc  $\zeta(b) = \alpha \zeta(a)$  et  $\zeta(d) = \alpha \zeta(c)$  donc  $M_2 = \alpha M_1$ .

ce qui implique que  $\det \begin{pmatrix} \zeta(a) & \zeta(c) \\ \zeta(b) & \zeta(d) \end{pmatrix} = \zeta(a)\zeta(d) - \zeta(c)\zeta(b) \neq 0$ .

V.C - On a  $\zeta \neq 0$  car sinon  $\forall a, b, c, d$ , on aura  $\zeta(a)\zeta(d) = 0 = \zeta(b)\zeta(c)$  ce qui contredit le résultat de Q-V.A.

donc :  $\exists a \in \mathbb{R}, \zeta(a) \neq 0$ , on peut prendre  $a \neq 0$  car si  $a = 0$  la continuité de  $\zeta$  assure l'existence de  $a' \neq 0$  au voisinage de  $a$  tel que  $\zeta(a') \neq 0$

donc :  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$x \neq y \implies xa \neq ya \implies \zeta(x)\zeta(a) \neq \zeta(y)\zeta(a) \implies \zeta(x) \neq \zeta(y)$$

d'où :  $\zeta$  est injective.

Supposons que  $\zeta$  n'est pas strictement monotone, il existe donc trois points  $a < b < c$  tels que  $\zeta(b) \notin [\min(\zeta(a), \zeta(c)), \max(\zeta(a), \zeta(c))]$

Supposons  $\zeta(b) < \zeta(a) < \zeta(c)$ , alors  $\zeta(a)$  est un point de l'intervalle  $[\zeta(b), \zeta(c)]$  et comme  $\zeta$  est continue sur  $[b, c]$ , d'après le T.V.I, il existe un point  $d \in [b, c]$  tel que  $\zeta(d) = \zeta(a)$  or  $d \neq a$ , d'où  $\zeta$  est non injective.

Il y a trois autres cas,  $\zeta(b) < \zeta(c) < \zeta(a)$ ,  $\zeta(a) < \zeta(c) < \zeta(b)$  et  $\zeta(c) < \zeta(a) < \zeta(b)$  qui se traitent de manière analogue.

V.D - Supposons  $\exists a \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\zeta(a) = 0$ . On prend  $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ , puisque  $a \neq 0$  on aura :  $x \neq y \implies ax \neq ay \implies \zeta(x)\zeta(a) \neq \zeta(a)\zeta(y) \implies 0 \neq 0$ . Absurde.

D'où  $\zeta$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$

V.E - On montre que  $\zeta(0) = 0$ .

V.E - 1) on suppose ici  $\zeta(0) \neq 0$  et  $\zeta$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$  donc  $\zeta$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et comme  $\zeta$  est continue il va garder un signe constant sur  $\mathbb{R}$ ; on peut le prendre positif.

on a alors : si  $\zeta$  est strictement croissante :  $\zeta(0) < \frac{\zeta(0)\zeta(2)}{\zeta(1)} < \zeta(2)$  et comme  $\zeta$  est continue le T.V.I donne  $\exists \alpha \in ]0, 2[, \zeta(\alpha) = \frac{\zeta(0)\zeta(2)}{\zeta(1)}$ .

Raisonnement analogue dans le cas où  $\zeta$  est strictement décroissante

V.E - 2) On a  $0.2 \neq 1.\alpha$  et  $\zeta(0)\zeta(2) = \zeta(1)\zeta(\alpha)$  ce qui contredit la relation de Q-V.B.

V.F - Supposons  $\exists x, y \in I$ , tel que  $(\eta(xy))^2 \neq \eta(x^2)\eta(y^2)$  c-à-d  $\zeta(\eta(xy))\zeta(\eta(xy)) \neq \zeta(\eta(x^2))\zeta(\eta(y^2))$ .

ce qui implique  $\zeta(\eta(xy))\zeta(\eta(xy)) \neq \zeta(\eta(x^2))\zeta(\eta(y^2))$  ce qui implique encore  $(xy)^2 \neq (x^2)(y^2)$ . Absurde.

V.G - On suppose que  $\eta$  prend des valeurs strictement positives sur  $I \cap ]0, +\infty[$

V.G - 1) Pour que  $\eta(e^{2x})$  soit définie il faut que  $e^{2x}$  soit dans  $I \cap ]0, +\infty[$ ,

ce qui signifie que  $e^{2x} < m = \sup(I \cap ]0, +\infty[)$ ,

ce qui signifie que :  $x \in ]-\infty, \frac{\ln m}{2}[$ , on prend  $M = \frac{\ln m}{2}$ .

et alors on a si  $x, y \in ]-\infty, \frac{\ln m}{2}[$  on a  $2x \in ]-\infty, \ln m[$ ,  $2y \in ]-\infty, \ln m[$  et  $x + y \in ]-\infty, \ln m[$

et dans ce cas on a :

$$f(x+y) = \ln(\eta(e^{x+y})) = \ln((\eta(e^{2x}))^{\frac{1}{2}}(\eta(e^{2y}))^{\frac{1}{2}}) = \ln((\eta(e^{2x}))^{\frac{1}{2}}) + \ln((\eta(e^{2y}))^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

V.G - 2) D'après IV.C  $f(t) = c_1t + c_2$  donc  $\ln(\eta(e^t)) = c_1t + c_2$  donc  $\eta(e^t) = e^{c_1t+c_2}$  en posant  $x = e^t$ ,  $\alpha_1 = c_1$  et  $K_1 = e^{c_2}$  on aura  $\eta(x) = K_1x^{\alpha_1}$ .

V.G - 3) Puisque on a :  $\forall x \in ]-\infty, 0[ \cap I, e^x > 0$  on a  $f(x) = \ln(\eta(\exp x))$  est bien définie et on fait un raisonnement analogue en posant  $x = -e^t$ .

V.G - 4) Supposons que  $I$  est un intervalle distinct de  $\mathbb{R}$  donc il aura une borne finie on la suppose celle de  $I \cap ]0, +\infty[$  et comme  $\eta(x) = K_1x^{\alpha_1}$  il est de limite finie en cette borne et par suite  $\eta(I)$  ne serait pas  $\mathbb{R}$ , absurde car  $\eta$  est une bijection de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

montrons que  $\eta$  est impaire : maintenant  $I = \mathbb{R}$ .

on a :  $\forall x > 0, \eta(x) = K_1x^{\alpha_1}$  et  $\forall x < 0, \eta(x) = K_2x^{\alpha_2}$ .

et pour tout  $x, y$  tels que  $x > 0$  et  $y < 0$ , on a  $xy < 0$ ,

et  $\eta(xy) = K_2(xy)^{\alpha_2}$ ,  $\eta(x^2) = K_1(x^2)^{\alpha_1}$  et  $\eta(y^2) = K_1(y^2)^{\alpha_1}$ ,

et la relation  $(\eta(xy))^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$  donne  $(K_2)^2(-xy)^{2\alpha_2} = (K_1)^2((xy)^2)^{\alpha_1}$ .

donc : pour  $x = 1$  et  $y = -1$  on a  $(K_2)^2 = (K_1)^2$ .

Et puisque on a : si  $x \in I$  et  $x > 0$  on a  $\eta(x) > 0 = \eta(0)$  et  $\eta$  est strictement monotone car sa réciproque  $\zeta$  l'est aussi, donc :  $\eta$  est strictement croissante donc  $\eta$  prend des valeurs strictement négatives sur  $] -\infty, 0[ \cap I$  et des valeurs

strictement positives sur  $I \cap ]0, +\infty[$ , on en tire que  $K_1 > 0$  et  $K_2 < 0$  d'où  $K_1 = -K_2$ .

D'autre part, pour  $x, y$  tels que  $x > 0$  et  $y < 0$ , et  $xy \neq -1$ ,  
 $(K_2)^2(-xy)^{2\alpha_2} = (K_1)^2((xy)^2)^{\alpha_1} \implies (-xy)^{2\alpha_2} = ((xy)^2)^{\alpha_1}$ ,  
on compose par  $\ln$  on obtient  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \eta(x) = K_1 x^{\alpha_1} = K_1(-(-x))^{\alpha_1} = -K_2(-(-x))^{\alpha_1} = -\eta(-x),$$

et par suite  $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \eta(x) = -\eta(-x)$ .

et comme  $\xi(0) = 0$  on a  $\eta(0) = 0$ .

V.H - Si  $\xi$  est une fonction continue vérifiant la condition (V.1), alors d'après ce qui précède elle est strictement monotone et  $\xi(0) = 0$  donc soit il prend des valeurs strictement positives sur  $I \cap ]0, +\infty[$  et on applique ce qui précède, soit il prend des valeurs strictement négatives sur  $I \cap ]0, +\infty[$  et on prend dans ce cas la fonction  $-\xi$ .

On trouve alors que la fonction réciproque  $\eta$  de  $\xi$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et impaire et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*, \eta(x) = Kx^\alpha$ ,

on en déduit que  $\xi$  est impaire et  $\forall x > 0, \xi(x) = \frac{1}{K^{\frac{1}{\alpha}}} x^{\frac{1}{\alpha}}$ .

V.I - Pour le calcul de  $\det A_\lambda$ , on fait l'opération

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_d$$

on factorise dans la première colonne du déterminant obtenue par  $\lambda + d - 1$ , et on fait les opérations :

$$\forall i \in \{2, \dots, d\}, L_i \leftarrow L_i - L_1$$

on obtient un déterminant triangulaire, et on trouve :

$$\det A_\lambda = (\lambda + d - 1)(\lambda - 1)^{d-1}$$

V.J - Soit  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui vérifie la relation (V.1).

On a d'après la question Q.V.H. alors elle est impaire et  $\exists C \neq 0$ , et  $\beta > 0$  tel que  $\forall x > 0, \xi(x) = Cx^\beta$ .

D'autre part :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, A_\lambda \text{ inversible} \implies f_\xi(A_\lambda) \text{ inversible.}$$

ce qui signifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(A_\lambda) \neq 0 \implies \det(f_\xi(A_\lambda)) \neq 0$$

ce qui signifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda + d - 1)(\lambda - 1)^{d-1} \neq 0 \implies (\zeta(\lambda) + (d-1)\zeta(1))(\zeta(\lambda) - \zeta(1))^{d-1} \neq 0$$

le calcul de  $\det(f_{\zeta}(A_{\lambda}))$  par les mêmes opérations que déterminant de  $\det(A_{\lambda})$ .

ce qui signifie :

$$\lambda \neq 1 - d \text{ et } \lambda \neq 1 \implies \zeta(\lambda) \neq (1-d)\zeta(1) \text{ et } \zeta(\lambda) \neq \zeta(1) \implies \zeta(\lambda) \neq (1-d)\zeta(1)$$

ce qui signifie :

$$\zeta(\lambda) = (1-d)\zeta(1) \implies \lambda = 1 - d \text{ ou } \lambda = 1$$

or si  $\lambda = 1$ , comme  $\zeta$  est bijective et  $\zeta(0) = 0$  on a  $\zeta(1) \neq 0$ ,

donc  $\zeta(\lambda) = (1-d)\zeta(1) \implies 1 = 1-d < 0$  car  $d \geq 2$ . Absurde, donc :  $\lambda = 1 - d$ ,

et vu que :  $\zeta$  est impaire et  $\forall x > 0, \zeta(x) = Cx^{\beta}$

on a  $\zeta(1) = C$  et  $\zeta(1-d) = -C(d-1)^{\beta}$

donc :  $\zeta(\lambda) = (1-d)\zeta(1)$  donne  $-C(d-1)^{\beta} = (1-d)C$

donc :  $(d-1)^{\beta} = d-1$

d'où :  $\beta = 1$

Conclusion : les fonctions continues  $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (V.1) sont les fonctions linéaires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  c-à-d  $x \mapsto Cx, C \neq 0$ , et réciproquement de tels fonctions vérifient la condition (V.1).