

E3A, 2008, MP, Mathématiques A

(6 pages)

Questions de cours et exemples

1. Un polynôme annulateur de f est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. J_f est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ (et accessoirement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$).
3. Si $J_f \neq \{0\}$, le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire π_f tel que $J_f = \pi_f \cdot \mathbb{R}[X]$. C'est aussi le polynôme unitaire appartenant à J_f de plus petit degré.
4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $J_f \neq \{0\}$ puisque le polynôme caractéristique de f , χ_f appartient à J_f .

5. 1. On a $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M$ et donc, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k = M$.

2. Ainsi $X^2 - X \in J_f$ donc $\pi_f \mid X^2 - X = X(X - 1)$ et donc $\pi_f \in \{X, X - 1, X^2 - X\}$ (1 n'est pas annulateur si $E \neq \{0\}$). Or $M \neq 0$ et $M \neq I_4$ donc $\pi_f = X^2 - X$.

6. 1. $\diamond$ L'équation homogène $y'' + y = 0$ est à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Comme $\text{ch}'' = \text{ch}$, une solution particulière de $y'' + y = \text{ch}(x)$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \text{ch}(x)$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \text{ch}(x)$ sont les $y : x \mapsto \frac{1}{2} \text{ch}(x) + A \cos(x) + B \sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$\diamond$ De même, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \text{sh}(x)$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} \text{sh}(x) + A \cos(x) + B \sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. Puisque f est supposée de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\begin{aligned} (f \text{ solution de } (H_1)) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = f(x)) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) + f''(x) = f(x) + f''(x)) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = g(x)) \end{aligned}$$

donc $(f \text{ solution de } (H_1)) \iff (g = f'' + f \text{ solution de } y'' = y)$.

3. $(H_2) : y'' - y = 0$ est linéaire, homogène, à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 - 1 = 0$ donc a pour solutions les fonctions $x \mapsto A e^x + B e^{-x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, ou aussi, les solutions de (H_2) sont les $y : x \mapsto A \text{ch}(x) + B \text{sh}(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

4. Le principe de superposition des solutions et les résultats de la question [6.1] donnent :
les solutions de (H_1) sont les $y : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + C \operatorname{ch}(x) + D \operatorname{sh}(x)$ avec $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$.
5. 1. Par définition de E , la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ en est génératrice. De plus, si $A \cos + B \sin + C \operatorname{ch} + D \operatorname{sh} = 0$ alors, en dérivant deux fois, $-A \cos - B \sin + C \operatorname{ch} + D \operatorname{sh} = 0$ donc $A \cos + B \sin = 0$ et $C \operatorname{ch} + D \operatorname{sh} = 0$. En prenant les valeurs en 0 (par exemple), on obtient $A = B = C = D = 0$ donc cette famille est libre etc'est donc une base de E . Ainsi $\dim(E) = 4$.
2. La dérivation est linéaire et $(A \cos + B \sin + C \operatorname{ch} + D \operatorname{sh})' = -A \sin + B \cos + C \operatorname{sh} + D \operatorname{ch} \in E$ donc E est stable. Donc la dérivation induit bien un endomorphisme de E .
3. D'après [6.4], E est l'ensemble des solutions de (H_1) donc $\forall y \in E, y^{(4)} = \delta^4(y) = y$. Ainsi $X^4 - 1 \in J_\delta$ et $\pi_\delta \mid X^4 - 1$. Si $\pi_\delta \neq X^4 - 1$ alors $\deg(\pi_\delta) \leq 3$ donc $\pi_\delta = \sum_{i=0}^3 a_i X^i$. On alors

$$\begin{aligned} \forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \quad 0 &= \pi_\delta(\delta)[A \cos + B \sin + C \operatorname{ch} + D \operatorname{sh}] \\ &= \sum_{i=0}^3 a_i [A \cos + B \sin + C \operatorname{ch} + D \operatorname{sh}]^{(i)} \\ &= ((a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B) \cos + ((a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A) \sin \\ &\quad + ((a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D) \operatorname{ch} + ((a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C) \operatorname{sh} \end{aligned}$$

donc, par liberté de $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$,

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} (a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B = 0 \\ (a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A = 0 \\ (a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D = 0 \\ (a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C = 0 \end{cases}$$

soit $a_0 = a_2 = -a_0$ et $a_1 = a_3 = -a_1$ donc $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ce qui est absurde. Donc $\pi_\delta = X^4 - 1$.

Problème

Partie I

1. On a $\dim(E_n) = n + 1$ et une base est $(X^k)_{k \in [0, n]}$.
2. $\diamond \forall P \in E, u(P) = P' \in E$ et $\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = u(P) + \lambda u(Q)$ donc $u \in \mathcal{L}(E)$.
De plus, si $\deg(P) \neq 0$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$ et si $\deg(P) = 0$, $\deg(P') = -\infty$ donc $u(E_n) \subset E_n$.
- $\diamond$ Si $P \neq 0$ et $\deg(P) = d$ avec $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ alors $v(P) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^d a_k (X^k + kX^{k-1} + \dots) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \dots$ donc $v(E_n) \subset E_n$.
On a donc $\forall P \in E, v(P) \in E$ et $\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, v(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X+1) = P(X+1) + \lambda Q(X+1) = v(P) + \lambda v(Q)$ donc $v \in \mathcal{L}(E)$.

3. $\diamond u(1) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u(X^k) = k X^{k-1}$ donc $U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$\diamond \forall k \in \mathbb{N}$, $v(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i$ donc $V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} & \vdots & \vdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

4. $\diamond P' = 0$ si et seulement si P est constant donc $\underline{\text{Ker}(u_n) = E_0}$ et $\text{Im}(u_n) = \text{Vect}(u_n(1), u_n(X), \dots, u_n(X^n)) = \text{Vect}(0, 1, \dots, nX^{n-1})$ donc $\underline{\text{Im}(u_n) = E_{n-1}}$.
 $\diamond \det(v_n) = \det(V_n) = 1 \neq 0$ donc v_n est un automorphisme de E_n et donc $\underline{\text{Ker}(v_n) = \{0\}}$ et $\underline{\text{Im}(v_n) = E_n}$.

5. On a $\forall P \in E$, $u \circ v(P) = (P(X+1))' = P'(X+1) = v \circ u(P)$ donc $\underline{u_n \text{ et } v_n \text{ commutent}}$.

6. $\diamond \chi_{u_n} = \chi_{U_n}$ donc $\underline{\chi_{u_n} = X^{n+1}}$.
 $\diamond$ Donc 0 est valeur propre de multiplicité $n+1$ et l'espace propre associé est $E_0(u_n) = \text{Ker}(u_n) = E_0 \neq E_n$ car $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\underline{u_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

7. $\diamond \chi_{v_n} = \chi_{V_n}$ donc $\underline{\chi_{v_n} = (X-1)^{n+1}}$.
 $\diamond$ Donc $\text{Sp}(v_n) = \{1\}$ et donc si v_n était diagonalisable sa matrice dans une base de diagonalisation serait I_{n+1} et ceci serait vrai dans toute base donc $\underline{v_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

8. 1. On a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(Q_k) = k$ donc la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de degrés étagés donc $\underline{(Q_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } E_n}$.

2. $\diamond w_n(Q_0) = v_n(Q_0) - Q_0 = Q_0 - Q_0$ donc $\underline{w_n(Q_0) = 0}$.

$$\diamond \forall k \geq 2, w_n(Q_k) = v_n(Q_k) - Q_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) = \frac{1}{k!} \prod_{j=-1}^{k-2} (X-j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j)$$

$$= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) [(X+1) - (X-k+1)] = \frac{k}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j)$$

et, pour $k=1$, $w_n(Q_1) = (X+1) - X = 1 = Q_0$ donc $\underline{\forall k \geq 1, w_n(Q_k) = Q_{k-1}}$.

3. $W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

4. On lit sur la matrice W_n : $\text{rg}(W_n) = n$, $Q_0 \in \text{Ker}(w_n)$, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_k \in \text{Im}(w_n)$ donc $\underline{\text{Ker}(w_n) = \mathbb{R}.Q_0}$ et $\underline{\text{Im}(w_n) = \text{Vect}(Q_k)_{0 \leq k \leq n-1}}$.

5. On a, par récurrence sur j , $w_n^j(Q_k) = \begin{cases} Q_{k-j} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$
-
9. 1. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E_n , $\forall P \in E_n$, $\exists ! (\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$, $P = \sum_{k=0}^n \beta_k Q_k$.
-
2. On a $w_n^j(P) = \sum_{k=0}^n \beta_k w_n^j(Q_k) = \begin{cases} \sum_{k=j}^n \beta_k Q_{k-j} & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{si } j > n. \end{cases}$ De plus, $Q_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$
Donc $w_n^j(P)(0) = \begin{cases} \beta_j & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{si } j > n. \end{cases}$
-
3. Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\beta_k = w_n^k(P)(0)$. Or $w_n^k = (v_n - e_n)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_n^j$ car v_n et e_n commutent. Et, par récurrence facile, $v_n^j(P)(X) = P(X+j)$ donc $w_n^k(P)(X) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(X+j)$. En évaluant en 0, on obtient donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\beta_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j)$.
-
4. Et donc la base duale de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}^* = (Q_k^*)_{0 \leq k \leq n}$ avec $Q_k^*(P) = w_n^k(P)(0) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j)$.
-
10. $\diamond$ Selon la question [8.5], $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $w_n^{n+1}(Q_k) = 0$ donc $\underline{w_n^{n+1} = \theta_n}$.
 $\diamond$ De la même question on tire $\underline{w_n^n(Q_n) = Q_0}$.

Partie II

1. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_f \in J_f$ donc $\pi_f \mid \chi_f$.
2. 1. On a, par récurrence sur k , $\forall P \in E$, $u^k(P) = P^{(k)}$. Or, si $P \in E_n$ alors $\deg(P) < n+1$ donc $P^{(n+1)} = 0$. Ainsi $\underline{u_n^{n+1} = \theta_n}$.
2. De même, $\underline{u_n^n(X^n) = n!}$ (en dérivant n fois).
3. Selon [1], $u_n^{n+1} = \theta_n$ donc $X^{n+1} \in J_{u_n}$ donc $\pi_{u_n} \mid X^{n+1}$ et donc $\exists m \leq n+1$, $\pi_{u_n} = X^m$. Si on avait $m \leq n$ alors $\pi_{u_n} \mid X^n$ donc $u_n^n = \theta_n$ mais ceci est faux selon [2]. Finalement, $\underline{\pi_{u_n} = X^{n+1}}$.
4. Selon [I.10], $w_n^{n+1} = \theta_n$ et $w_n^n \neq \theta_n$ donc, comme ci-dessus, $\underline{\pi_{w_n} = X^{n+1}}$.
3. 1. $\pi_{v_n} \mid \chi_{v_n} = \chi_{V_n} = (X-1)^{n+1}$ donc $\underline{\exists m \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \pi_{v_n} = (X-1)^m}$.
2. Donc $(v_n - e_n)^m = \theta_n$ soit $w_n^m = \theta_n$ donc $\pi_{w_n} \mid X^m$ et donc, vu le résultat de [2.4], $\underline{m = n+1}$.
4. 1. Puisque $\deg(P) = m$, on a $\underline{a_m \neq 0}$.

2. $r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^m a_j u^j\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} u^j(X^m) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} (X^m)^{(j)} = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} m(m-1)\cdots(m-j+1) X^{m-j}$
 1) $X^{m-j} = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} \frac{m!}{(m-j)!} X^{m-j}$ donc $r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{(m-j)!} X^{m-j}$.
3. Ainsi $r\left(\frac{X^m}{m!}\right) \neq 0$ donc $r \neq \theta$ donc $\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}, P(u) \neq \theta$ donc $\underline{J_u = \{0\}}$.
5. 1. Soit $P \in J_v$, on a $P(v) = \theta$ donc, par restriction à E_n stable par v , $P(v_n) = \theta_n$ donc $\pi_{v_n} \mid P$. Ceci donne bien, avec le résultat de [3.2], $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X-1)^{n+1} \mid P$.
2. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists Q_n \in E, P = (X-1)^{n+1} Q_n$ donc $\deg(P) = n+1 + \deg(Q_n)$. En prenant $n \geq \deg(P)$, ceci donne $\deg(Q_n) = -\infty$ donc $P = 0$. Donc $\underline{J_v = \{0\}}$.
6. 1. Soit $Q = s(P)$ et $R = s^2(P)$, on a $R(X) = Q(1-X) = P(1-(1-X)) = P(X)$ donc $\underline{s^2 = e}$ (s involution).
2. On a donc $X^2 - 1 \in J_s$ et donc $J_s \neq \{0\}$. Ainsi s a un polynôme minimal π_s et $\pi_s \in \{X+1, X-1, X^2-1\}$. Or $s \neq e$ car $s(X) = 1-X \neq X$ et, de même, $s \neq -e$ donc $\pi_s = X^2 - 1$ et $\underline{J_s = (X^2 - 1)\mathbb{R}[X]}$.

Partie III

1. $\exp(u_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m}{m!} = \sum_{m=0}^n \frac{u_n^m}{m!}$ d'après [II.2.1]. On peut donner deux démonstrations de l'égalité demandée :

• **Première démonstration :**

Montrons que $\exp(u_n)$ et v_n coïncident sur la base canonique $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$:

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad v_n(X^k) = (X+1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^{k-j}$$

$$\exp(u_n)(X^k) = \sum_{m=0}^n \frac{u_n^m(X^k)}{m!} = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} X^{k-m} \text{ selon [II.4.2]}$$

et donc $\underline{v_n = \exp(u_n)}$.

• **Deuxième démonstration :**

La formule de Taylor en X appliquée à $P \in E$ donne $P(X+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P^{(m)}(X)}{m!} h^m$. En prenant $h = 1$,

on obtient $P(X+1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P^{(m)}(X)}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m(P)}{m!}$ soit $\underline{v_n = \exp(u_n)}$.

2. 1. D'après [I.9.3], $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^n w_n^j(u_n(Q_k))(0) Q_j$. Or u_n et v_n commutent ([I.5]) donc u_n et $w_n = v_n - e_n$ également donc $w_n^j(u_n(Q_k)) = u_n(w_n^j(Q_k)) = \begin{cases} u_n(Q_{k-j}) & \text{si } j \leq k \\ u_n(0) & \text{si } j > k \end{cases}$ d'après ([I.8.5]). Ceci donne $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^k u_n(Q_{k-j})(0) Q_j$ soit $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^k u_n(Q_m)(0) Q_{k-m}$.

$$2. \quad u_n(Q_m)(0) = Q'_m(0) = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X \neq 0}} \frac{Q_m(X) - Q_m(0)}{X} \text{ avec } \frac{Q_m(X) - Q_m(0)}{X} = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0, \\ \frac{1}{m!} \prod_{j=1}^{m-1} (X - j) & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{Donc } u_n(Q_m)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0, \\ \frac{(-1)^{m-1}}{m} & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

$$3. \quad \text{Ainsi } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m-1}}{m} Q_{k-m}. \text{ D'autre part,}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (v_n - e_n)^m(Q_k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} w_n^m(Q_k) = \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m-1}}{m} Q_{k-m} \quad \text{selon [I.8.5].}$$

Les deux endomorphismes de E_n , u_n et $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (v_n - e_n)^m$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$ donc ils sont égaux soit $u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (v_n - e_n)^m$.

* * *
* *
*