

# Banque PT 2010 — épreuve B

## Partie I

### Question I.1

Les matrices des formes quadratiques associées sont  $Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $Q_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ .

On trouve aisément leurs polynômes caractéristiques :

$$\det(Q_1 - XI_3) = -X(X-2)(X-3) \quad \text{et} \quad \det(Q_2 - XI_3) = -(X+2)(X-3)(X-6).$$

Ainsi, dans des bases orthonormées bien choisies, les équations deviennent :  $2X^2 + 3Y^2 = 1$  pour  $Q_1$  ;  $-2X^2 + 3Y^2 + 6Z^2 = 1$  pour  $Q_2$ .

On reconnaît :  $Q_1$  est un cylindre à base elliptique ;  $Q_2$  est un hyperboloïde à une nappe.

### Question I.2

Posant  $f(x, y, z) = 7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 2yz - 4xz - 4x + 5y + 4z + 4 = 0$ , on trouve que

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \vec{0} \iff \begin{cases} 7x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 4y - z = -\frac{5}{2} \\ -2x - y + 4z = -2 \end{cases} \iff (x, y, z) = \left(\frac{11}{27}, -\frac{26}{27}, -\frac{29}{54}\right),$$

ce qui revient à dire que  $Q_3$  est une quadrique à centre, et que  $I$  est son centre.

La matrice de la forme quadratique associée est  $Q_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ , dont le polynôme caractéristique

vaut  $\det(Q_3 - XI_3) = -(X-3)^2(X-9)$ .

L'espace propre pour la valeur propre 9 est la droite dirigée par  $(2, 1, -1)$  donc aussi par  $\vec{e}_1$ .

L'espace propre pour la valeur propre 3 est ainsi le plan orthogonal, d'équation  $2x + y - z = 0$ , dont il se trouve que  $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base orthonormée.

Finalement, dans le repère orthonormé  $(I; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , une équation de  $Q_3$  est  $9X^2 + 3Y^2 + 3Z^2 - f(I) = 0$  donc (si on a une calculatrice pour évaluer  $f(I)$ ) :  $9X^2 + 3Y^2 + 3Z^2 = \frac{8}{27}$ .

On reconnaît un ellipsoïde, de révolution autour de l'axe  $(I; \vec{e}_1)$  des abscisses  $X$ .

On trouve l'ellipsoïde qui est baptisé  $Q$  dans la suite.

### Question I.3

Soit  $V$  le volume demandé. Pour  $x = x_0$  fixé, la section du volume avec le plan  $x = x_0$  est un disque

d'équation  $3y^2 + 3z^2 = \frac{8}{27} - 9x_0^2$  et donc de rayon  $\frac{\sqrt{8 - 243x_0^2}}{9}$ , sa surface vaut  $S(x_0) = \pi(\frac{8}{81} - 3x_0^2)$ .

On en déduit le volume demandé

$$V = \int_{-\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} \pi\left(\frac{8}{81} - 3x_0^2\right) dx_0 = \pi \left[ \frac{8x_0}{81} - x_0^3 \right]_{-\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} = \frac{64\pi\sqrt{6}}{6561}.$$

(Là encore, sans calculatrice, c'est pénible.)

On connaît peut-être aussi la formule  $V = \frac{4}{3}\pi abc$  du volume de l'ellipsoïde d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

### Question I.4

Posant  $\varphi(x, y, z) = 9x^2 + 3y^2 + 3z^2 - \frac{8}{27}$ , on sait que  $\vec{n}_0 = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)(x_0, y_0, z_0)$  dirige la normale au plan tangent demandé. On trouve ici que  $\vec{n}_0$  est colinéaire à  $(3x_0, y_0, z_0)$ .

Ce plan tangent a donc pour équation  $3x_0x + y_0y + z_0z = 3x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \iff 3x_0x + y_0y + z_0z = \frac{8}{81}$ .

### Question I.5

I.5.a La normale est paramétrée par  $\begin{cases} x = x_0 + 3tx_0 \\ y = y_0 + ty_0 \\ z = z_0 + tz_0 \end{cases}$  et admet donc pour équations  $\begin{cases} y_0x - 3x_0y = -2x_0y_0 \\ yz_0 - y_0z = 0 \end{cases}$  par exemple.

I.5.b Comme  $M, P, Q$  et  $R$  sont tous les quatre sur la même droite  $\Delta_M$ , les trois vecteurs  $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$  et  $\overrightarrow{MR}$  sont évidemment colinéaires.

### Question I.6

Il est utile, voire nécessaire, d'avoir à disposition Maple pour traiter cette question...

I.6.a L'intersection de  $\mathcal{Q}$  avec le plan  $z = 0$  est l'ellipse  $\mathcal{E}_0$  d'équation  $9x^2 + 3y^2 = \frac{8}{27}$ .

I.6.b Un point  $M$  est sur le cône  $\mathcal{C}_T$  si et seulement si la droite  $(TM)$  coupe le plan  $z = 0$  en un point de l'ellipse  $\mathcal{E}_0$ .

On aura alors  $T + \lambda \overrightarrow{TM} \in \mathcal{E}_0$ , et on obtiendra une équation du cône en éliminant le paramètre  $\lambda$ .

I.6.c On obtient ainsi

$$\begin{cases} 9(p + \lambda(x - p))^2 + 3(q + \lambda(y - q))^2 = \frac{8}{27} \\ r + \lambda(z - r) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{243}{8}(p + \lambda(x - p))^2 + \frac{81}{8}(q + \lambda(y - q))^2 = 1 \\ r + \lambda(z - r) = 0 \end{cases}$$

Observons que  $(z - r)(p + \lambda(x - p)) = p(z - r) - r(x - p) = pz - rx$  et que  $(z - r)(q + \lambda(y - q)) = q(z - r) - r(y - q) = qz - ry$ , en utilisant  $r + \lambda(z - r) = 0$ , et donc qu'en multipliant la première égalité par  $(z - r)^2$  on obtient bien une équation du cône  $\mathcal{C}_T$  sous la forme :

$$\frac{243}{8}(rx - pz)^2 + \frac{81}{8}(ry - qz)^2 = (z - r)^2.$$

I.6.d L'intersection  $\mathcal{C}_T \cap (yOz)$  a alors pour équations  $x = 0$  et  $\frac{243}{8}p^2z^2 + \frac{81}{8}(ry - qz)^2 = (z - r)^2$ . Cette deuxième équation se développe en

$$\begin{aligned} & \left(\frac{243}{8}p^2 + \frac{81}{8}q^2 - 1\right)z^2 + \frac{81}{8}r^2y^2 - \frac{81}{4}r q y z + 2rz = r^2 \\ \iff & (3p^2 + q^2 - \frac{8}{81})z^2 + r^2y^2 - 2r q y z + \frac{16}{81}rz = \frac{8}{81}r^2. \quad (e) \end{aligned}$$

I.6.e (e) est l'équation d'une conique du plan  $yOz$ .

La méthode du gradient (et l'utilisation de Maple !) montre que, si  $3p^2 \neq \frac{8}{81}$ , cette conique a un centre de coordonnées  $y = -\frac{8}{81} \frac{q}{3p^2 - \frac{8}{81}}$  et  $z = -\frac{8}{81} \frac{r}{3p^2 - \frac{8}{81}}$ . L'origine ayant été translatée en ce centre, l'équation (e) se réécrit

$$(3p^2 + q^2 - \frac{8}{81})z^2 + r^2y^2 - 2r q y z = \frac{24}{81} \frac{p^2 r^2}{3p^2 - \frac{8}{81}}. \quad (e')$$

La matrice de la forme quadratique associée est  $Q = \begin{pmatrix} 3p^2 + q^2 - \frac{8}{81} & -rq \\ -rq & r^2 \end{pmatrix}$  et le polynôme caractéristique de  $Q$  vaut  $X^2 - \text{tr}(Q)X + \det Q$ .

Pour que l'intersection  $\mathcal{C}_T \cap (yOz)$  soit un cercle, il faut imposer que  $Q$  ait deux valeurs propres égales, donc que le discriminant du polynôme précédent soit nul.

On obtient ainsi la condition  $(\text{tr } Q)^2 = 4 \det Q$  ou encore

$$\left(3p^2 + q^2 + r^2 - \frac{8}{81}\right)^2 = 4r^2(3p^2 - \frac{8}{81}).$$

Cette condition impose que  $3p^2 > \frac{8}{81}$ , ce qui entraîne que la trace est positive, donc la valeur propre double également positive et finalement que (e') est bien une équation de cercle.

On peut alors poser  $a^2 = 3p^2 - \frac{8}{81}$ , et la condition (C) se réécrit

$$(a^2 + q^2 + r^2)^2 = 4a^2r^2 \iff a^2 \pm 2ar + r^2 + q^2 = 0 \iff (a \pm r)^2 + q^2 = 0 \iff q = 0 \text{ et } a = \pm r$$

$\mathcal{H}$  est donc l'hyperbole du plan  $y = 0$  qui a pour équation  $3x^2 - z^2 = \frac{8}{81}$  (puisqu'on a écrit les coordonnées de  $T$  sous la forme  $x = p, y = q, z = r$ ).

## Partie II

### Question II.1

$\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $\Omega(2,1,0)$  et de rayon  $R = \sqrt{5}$  puisque son équation se réécrit facilement  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ .

### Question II.2

Pour trouver la tangente au cercle en  $O$ , on peut, par exemple, dire qu'elle est orthogonale à  $\overrightarrow{\Omega O}$ , on obtient ainsi la droite du plan  $z = 0$  qui a pour équation  $2x + y = 0$ .

### Question II.3

La droite d'équation  $y = mx - 3m - 2$  a bien pour coefficient directeur  $m$ , elle passe bien par  $A$  : c'est donc  $d_m$ .

### Question II.4

C'est une formule bien connue :  $\delta_m = \frac{|2m - 3m - 2 - 1|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = \frac{|m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ .

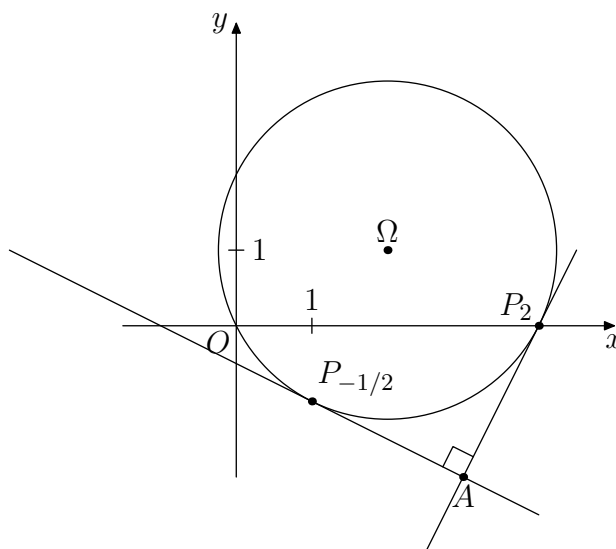
### Question II.5

$d_m$  est tangente au cercle si et seulement si  $\delta_m = R$ , c'est-à-dire, en élevant au carré si et seulement si  $(m + 3)^2 = 5(m^2 + 1) \iff 4m^2 - 6m - 4 = 0 \iff 4(m - 2)(m + \frac{1}{2}) = 0$ . On trouve donc bien deux tangentes issues de  $A$ , de pentes 2 et  $-1/2$ . On remarque au passage que ces deux tangentes sont perpendiculaires en  $A$ .

$d_2$  a pour équation  $y = 2x - 8$  (et  $z = 0$ , bien sûr), elle est dirigée par  $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$  ; on trouve son point de contact  $P_2$  avec le cercle en écrivant par exemple

$$\begin{cases} P_2 \in d_2 \\ \vec{u}_2 \perp \overrightarrow{\Omega P_2} \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 2x - 8 \\ x - 2 + 2(y - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

De même  $d_{-1/2}$  a pour équation  $y = -\frac{x+1}{2}$  (et  $z = 0$ ). La même méthode fournit le point de contact  $P_{-1/2}$  avec le cercle ; on obtient  $P_{-1/2}(1, -1, 0)$ .



**Figure 1** deux tangentes perpendiculaires issues de  $A$

### Question II.6

Dans toute la suite de cette partie, on travaille dans le plan  $(xOy)$  d'équation  $z = 0$  et on omettra la troisième coordonnée, toujours nulle, des points considérés.

Avec les notations usuelles, notre ellipse, centrée à l'origine et d'axe focal  $(Oy)$ , a pour paramètres  $a = 1$ ,  $b = 1/2$  donc  $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ses foyers sont donc  $F_1(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$  et  $F_2(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

Ses directrices sont d'équations  $y = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$  ; son excentricité est  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### Question II.7

On utilise la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire  $\mathcal{A}$  demandée :

$$\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{E}} x \, dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos t \cos t \, dt = \frac{1}{4} [t + \cos t \sin t]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

### Question II.8

Le point  $B$  est le point de paramètre  $t = \frac{\pi}{3}$ . En ce point, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées  $(-\frac{1}{2} \sin t, \cos t) = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ .

Une équation de la tangente est donc  $2x + y\sqrt{3} = 2$ .

### Question II.9

II.9.a On reprend l'équation cartésienne de l'ellipse, sous la forme  $\varphi(x, y) = 0$  où  $\varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 1$ . On sait que  $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)$  dirige la normale au point courant.

On en déduit une équation de la tangente en un point  $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$  sous la forme  $4x_0x + y_0y = 4x_0^2 + y_0^2$  ou encore  $4x_0x + y_0y = 1$ , puisque  $\varphi(x_0, y_0) = 0$ .

II.9.b  $D$  est tangente à  $\mathcal{E}$  si son équation est équivalente à la précédente, pour des valeurs particulières de  $(x_0, y_0)$ .

Comme  $a$  et  $b$  sont non tous les deux nuls,  $c$  n'est pas nul non plus.

$D$  est alors tangente à  $\mathcal{E}$  si et seulement si il existe  $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$  tel que 
$$\begin{cases} 4x_0 = \frac{a}{c} \\ y_0 = \frac{b}{c} \end{cases} \text{ c'est-à-dire si et}$$

seulement si  $4\left(\frac{a}{4c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$  et on trouve bien la condition  $a^2 + 4b^2 = 4c^2$ .

II.9.c Il suffit de remplacer dans l'équation :  $D$  passe par  $M(\alpha, \beta)$  si et seulement si  $a\alpha + b\beta = c$ .

II.9.d L'énoncé semble supposer  $a \neq 0$ .

On réunit les deux résultats précédents :

$$\begin{cases} M \in D \\ D \text{ tangente à } \mathcal{E} \end{cases} \iff \begin{cases} c = a\alpha + b\beta \\ a^2 + 4b^2 = 4c^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = a\alpha + b\beta \\ a^2 + 4b^2 = 4a^2\alpha^2 + 8ab\alpha\beta + 4b^2\beta^2 \end{cases}$$

et, divisant par  $a^2$ , on obtient la condition requise :

$$1 + 4m^2 = 4\alpha^2 - 8m\alpha\beta + 4m^2\beta^2 \iff (1 - \beta^2)m^2 + 2\alpha\beta m + \frac{1}{4} - \alpha^2 = 0.$$

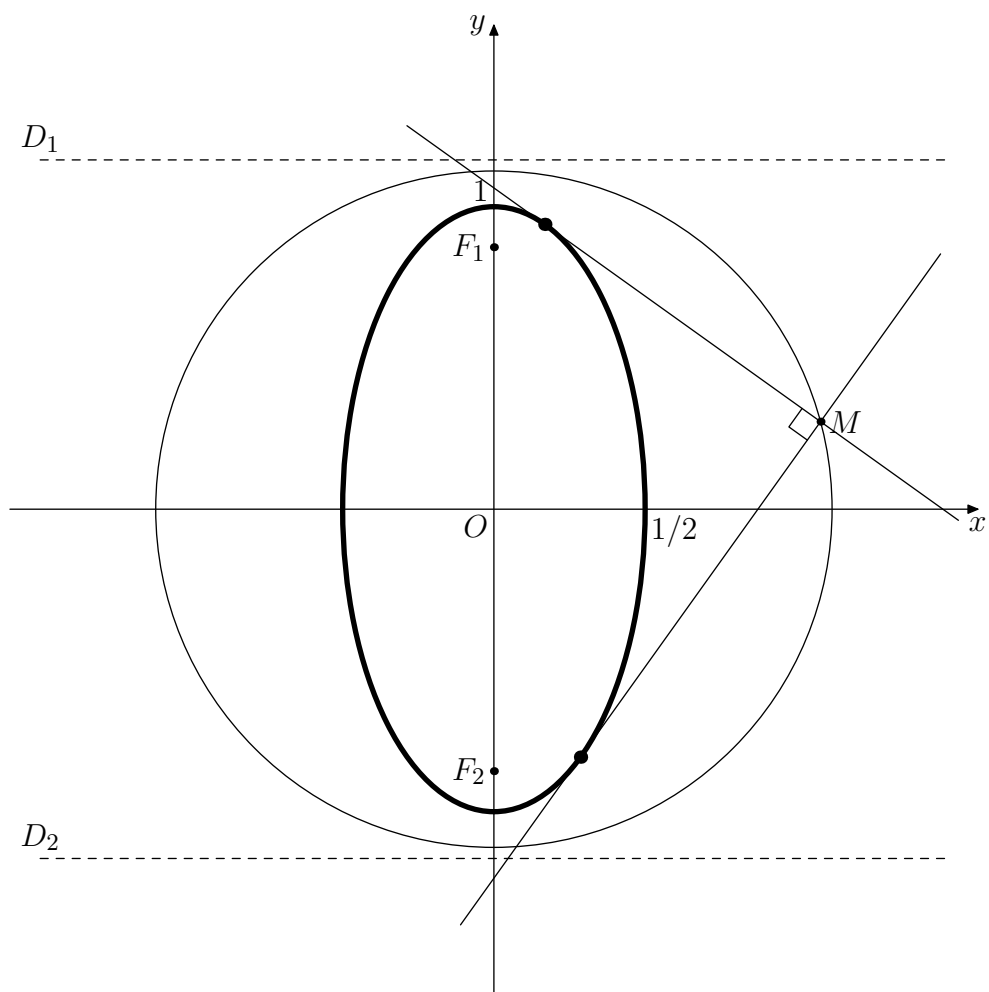
II.9.e On cherche à quelle condition l'équation précédente a deux solutions distinctes : il s'agit bien sûr de dire que le discriminant du trinôme est strictement positif. On trouve donc  $4\alpha^2\beta^2 - 4(\frac{1}{4} - \alpha^2)(1 - \beta^2) > 0$  ou encore  $4\alpha^2 + \beta^2 > 1$  : il s'agit bien entendu des points à l'extérieur de l'ellipse, ce dont on aurait pu se douter.

Remarque : dans le cas  $\beta = \pm 1$ , on ne peut plus poser  $m = -\frac{b}{a}$ , mais par exemple  $m' = -\frac{a}{b}$ . On trouverait alors la condition  $1 - \beta^2 + 2\alpha\beta m' + (\frac{1}{4} - \alpha^2)m'^2 = 0$  dont le discriminant vaut encore  $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ , ce qui donnerait le même résultat.

II.9.f Les deux tangentes trouvées sont orthogonales si leurs coefficients directeurs  $m_1$  et  $m_2$  vérifient  $m_1m_2 = -1$ , ce qui revient à dire que le produit des racines de l'équation du second degré en  $m$  précédente vaut  $-1$ . On trouve donc la condition  $\frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{1 - \beta^2} = -1$  ce qui se transforme en  $4\alpha^2 + 4\beta^2 = 5$ . On trouve

donc un cercle centré à l'origine et de rayon  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , appelé *cercle orthoptique de l'ellipse*.

On trouvera la construction dans la figure 2, page 5.



**Figure 2** le cercle orthoptique de l'ellipse  $\mathcal{E}$

## Partie III

### Question III.1

III.1.a Le paramètre  $t$  vérifie  $y = tx$  :  $t$  est donc la pente de la droite  $(OM)$  où  $M$  est le point de  $\Gamma$  de paramètre  $t$ .

III.1.b On vérifie que  $M(-t)$  est le symétrique de  $M(t)$  par rapport à l'axe  $(Ox)$  qui est donc axe de symétrie de  $\Gamma$ , permettant de réduire l'étude à  $t \in [0, +\infty[$ .

III.1.c On écrit d'abord  $x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \leq 0$ .

Puis  $y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$ , or

$$1 - 4t^2 - t^4 = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t^2 + 2 - \sqrt{5}) = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t - \sqrt{\sqrt{5}-2})(t + \sqrt{\sqrt{5}-2}),$$

qui a le signe de  $t_0 - t$ , où  $t_0 = \sqrt{\sqrt{5}-2}$ . On notera que  $y$  s'annule pour  $t = 0$  et pour  $t = 1 > t_0$ .

| $t$  | 0 | $t_0$    | $+\infty$ |
|------|---|----------|-----------|
| $x'$ | 0 | -        | -         |
| $y'$ | 0 | +        | -         |
| $x$  | 1 | $x(t_0)$ | -1        |
| $y$  | 0 | $y(t_0)$ | $-\infty$ |

**Tableau 1** le tableau de variations

III.1.d  $\Gamma$  a une seule asymptote : la droite verticale d'équation  $x = -1$ .

III.1.e La tangente est horizontale aux points de paramètres 0 et  $\pm t_0$ .

Elle est verticale pour  $t = 0$ , au point  $(1, 0)$ .

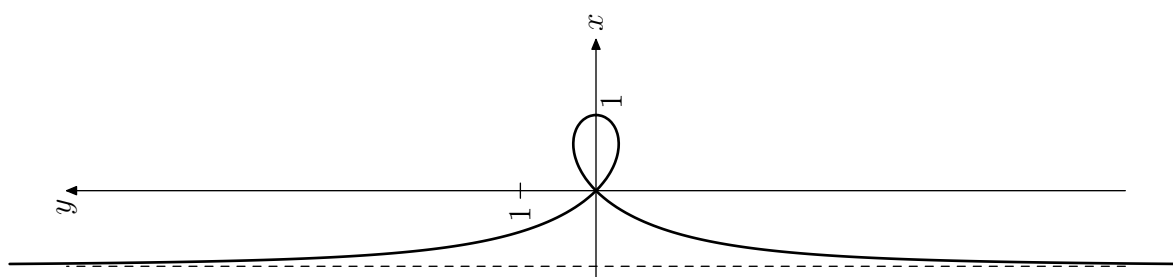
On trouve  $x(t_0) = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  et  $y(t_0) = t_0 x(t_0) = \sqrt{\sqrt{5}-2} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Si on avait une calculatrice, on trouverait  $x(t_0) \approx 0,618$  et  $y(t_0) \approx 0,300$ .

III.1.f  $x$  étant strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ , il n'y a pas de point double quand  $t$  décrit  $[0, +\infty[$ . Le point double demandé est donc sur l'axe de symétrie : c'est l'origine, atteinte pour  $t = \pm 1$ .

III.1.g On a  $(x'(1), y'(1)) = (-1, -1)$  et  $(x'(-1), y'(-1)) = (1, -1)$  : les deux tangentes coïncident avec les deux bissectrices des axes, elles sont perpendiculaires.

III.1.h On a fait tourner la figure suivante de 90 degrés, afin de la faire tenir proprement dans cette feuille.



**Figure 3** la courbe  $\Gamma$

### Question III.2

Si  $x \neq 0$ , on peut éliminer  $t$  en écrivant  $t = \frac{y}{x}$ , obtenant l'équation  $x = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  et donc finalement (e) :  $x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$ . Comme pour  $x = 0$ , (e) redonne le seul point  $(0, 0)$  qui est sur  $\Gamma$ , on a montré que tout point de  $\Gamma$  vérifie l'équation (e).

Soit réciproquement, un point  $M$  dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient l'équation (e) : si  $x = 0$ , on retrouve  $y = 0$  et  $M \in \Gamma$  ; sinon, posant  $t = y/x$ , (e) fournit  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  et  $y = tx$ , de sorte que  $M \in \Gamma$ .

Finalement (e) est bien une équation cartésienne de  $\Gamma$ .

### Question III.3

Passant en coordonnées polaires, on écrit  $x = \rho \cos \theta$  et  $y = \rho \sin \theta$ , et l'équation (e) devient  $\rho^3 \cos \theta = \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$ . On en déduit qu'une équation polaire de  $\Gamma$  est  $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ .

En effet, on n'a pas perdu l'origine ( $\rho = 0$ ) qu'on retrouve pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ .

### Question III.4

On utilise la formule habituelle en coordonnées polaires pour calculer l'aire  $\mathcal{A}$  demandée :

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

qu'on transforme en posant  $t = \tan \theta$  donc  $dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ . Comme  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1$ , on écrit

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left( \frac{4}{(1+t^2)^2} - \frac{4}{1+t^2} + 1 \right) dt = \left[ \frac{2t}{1+t^2} - 2 \arctan t + t \right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

### Question III.5

Dans cette question, on suppose que  $v \neq 0$ , sans quoi l'équation n'est pas de degré 3 et on ne pourrait parler des trois racines  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ .

III.5.a Il suffit de remplacer, dans l'équation de  $\Delta$ ,  $x$  et  $y$  par les expressions  $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  et  $y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2}$  pour obtenir le résultat de l'énoncé.

III.5.b En développant le membre de droite, on s'aperçoit que le coefficient de  $t$  vaut  $v(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)$ , et en identifiant avec le membre de gauche (puisque l'égalité de deux polynômes sur  $\mathbb{R}$  entraîne l'égalité de leurs coefficients), on trouve  $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = -1$ .

III.5.c Si trois points de  $\Gamma$ , de paramètres  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont alignés, la droite  $\Delta$  qui les porte a une équation de la forme  $ux + vy + wz = 0$ , (avec  $v \neq 0$  car une droite verticale ne coupe  $\Gamma$  qu'en 0, 1 ou 2 points, jamais 3) et d'après l'étude précédente on en déduit que  $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = -1$ .

Réciproquement, si on suppose que  $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = -1$ , l'un au moins de ces trois paramètres n'est pas nul, par exemple  $t_3 \neq 0$ .

Si on avait  $t_1 = -t_2$ , on aurait  $t_1^2 = 1$  dont  $t_1 = 1$  et  $t_2 = -1$  (ou le contraire), ce qui correspond à l'origine  $M(1) = M(-1) = O$ , et non pas à deux points distincts. On peut donc exclure le cas où  $t_1 = -t_2$ .

Soit alors  $\Delta : ux + vy + w = 0$  la droite qui passe par les points de paramètres  $t_1$  et  $t_2$ , cette droite n'est pas verticale car  $t_1 \neq -t_2$ .

Le calcul précédent montre que le polynôme  $P(t) = vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w)$  admet  $t_1$  et  $t_2$  pour racines, donc se factorise en  $P(t) = v(t-t_1)(t-t_2)(t-\tau)$ , et on aura de même  $t_1 t_2 + t_2 \tau + \tau t_1 = -1$ . Mais  $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = -1$  donc  $(t_1 + t_2)(t_3 - \tau) = 0$  et  $\tau = t_3$  car  $t_1 \neq t_2$ . On a bien montré que les trois points de paramètres  $t_1$ ,  $t_2$  et  $\tau = t_3$  se trouvent alignés sur la droite  $\Delta$ .

### Question III.6

III.6.a Le point  $A$  est de paramètre  $t_3 = 0$ .

III.6.b D'après la question III.5, on aura donc  $t_1 t_2 = -1$ .

III.6.c D'après la question III.1.a, cela traduit l'orthogonalité des droites  $(OM_1)$  et  $(OM_2)$ .

III.6.d Comme  $(OM_1) \perp (OM_2)$ , on en déduit que  $O$  est sur le cercle de diamètre  $[M_1 M_2]$ .

Ce cercle est donc tangent en  $O$  à l'axe  $(Ox)$  si et seulement si son centre, le milieu de  $[M_1 M_2]$ , est sur l'axe des  $y$ , c'est-à-dire si et seulement si  $x(t_1) = -x(t_2)$ , ce qui équivaut à la relation  $t_1^2 t_2^2 = 1$ , qui est satisfaite d'après III.6.b.

### Question III.7

III.7.a On a vu précédemment que dire que les points de paramètres  $t_0$ ,  $t_1$  et  $t_2$  sont alignés se traduit par la relation  $t_0 t_1 + t_1 t_2 + t_2 t_0 = -1$ .

La droite d'alignement est la tangente au point de paramètre  $\tau$  si le contact est d'ordre 2 en  $t = \tau$ , c'est-à-dire si  $t_1 = t_2 = \tau$ . On obtient donc que les paramètres  $t'$  et  $t''$  cherchés doivent être les solutions de l'équation  $2t_0 \tau + \tau^2 = -1$ , d'inconnue  $\tau$ .

Cette équation se réécrit  $(\tau + t_0)^2 = t_0^2 - 1$ , donc ces points  $M'$  et  $M''$  existent seulement pour  $t_0 > 1$  ou  $t_0 < -1$ , c'est-à-dire  $S$  à gauche de l'axe  $(Oy)$ .

Pour  $t_0 = \pm 1$ ,  $S = A$ , et il n'y a pas de tangente à  $\Gamma$  issue de  $A$  (autre que la tangente en  $A$  elle-même, bien sûr).

III.7.b Les paramètres  $t'$  et  $t''$  des points  $M'$  et  $M''$  sont les solutions de l'équation en  $\tau$  :  $\tau^2 + 2t_0\tau + 1 = 0$ . On a donc  $t' + t'' = -2t_0$  et  $t't'' = 1$ .

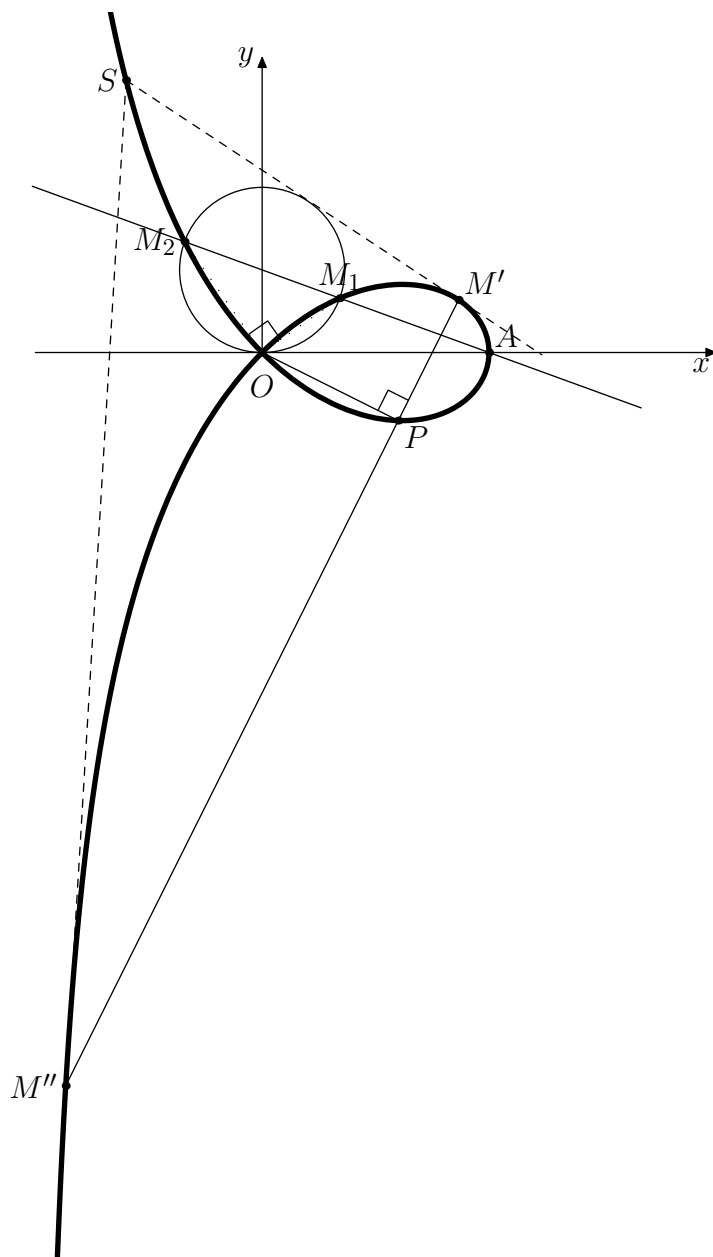
Alors, le paramètre  $\xi$  du troisième point  $P$  d'intersection de  $\Gamma$  avec  $(M'M'')$  vérifie

$$\xi t' + \xi t'' + t't'' = -1 \iff \xi(t' + t'') + t't'' + 1 = 0 \iff -2t_0\xi + 2 = 0 \iff \xi = \frac{1}{t_0}.$$

III.7.c Comme  $t't'' = 1$ ,  $t'' = 1/t'$  donc  $x(t'') = \frac{t'^2 - 1}{t'^2 + 1} = -x(t')$  puis  $y(t'') = t''x(t'') = -\frac{1}{t'}x(t')$ . Ainsi,

la pente de la droite  $(M'M'')$  vaut-elle  $\frac{y(t') - y(t'')}{x(t') - x(t'')} = \frac{t' + \frac{1}{t'}}{2} = \frac{t' + t''}{2} = -t_0$ .

$(M'M'')$  a pour pente  $-t_0$  ;  $(OP)$  a pour pente  $\xi = \frac{1}{t_0}$  : cela confirme que ces deux droites sont bien perpendiculaires.



**Figure 4** quelques constructions