

CENTRALE 2013 - PSI 1^{ère} épreuve

Partie I

I.A.1) G_x est C^1 2π -périodique, donc développable en série de Fourier, la convergence de la série étant normale.

I.A.2) Intégrer $k + 1$ fois par parties pour obtenir :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(in)^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} G_x^{(k+1)}(t) e^{-int} dt = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

I.B) Remarquer que $G_x(-t)$ est le conjugué de $G_x(t)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_x(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_x(-t) e^{int} dt \quad \text{en effectuant le changement de variable } t \rightarrow -t \\ &= \overline{\varphi_n(x)} \end{aligned}$$

I.C) Remarquer que $G_x(t + \pi) = G_{-x}(t) = G_x(-t)$. Effectuer le changement de variable $t \rightarrow t + \pi$ dans $\varphi_n(x)$ et utiliser $G_x(t + \pi) = G_{-x}(t)$ pour obtenir $\varphi_n(x) = (-1)^n \varphi_n(-x)$.

Effectuer le changement de variable $t \rightarrow -t$ dans $\varphi_n(-x)$ et utiliser $G_{-x}(t) = G_x(-t)$ pour obtenir $\varphi_n(-x) = \varphi_{-n}(x)$.

φ_n a même parité en tant que fonction que n en tant que nombre.

I.D) Identité de Parseval. Le résultat est 1, G_x étant de module 1.

Partie II

II.A) Majoration sans difficulté.

II.B) Développer $G_x(t)$ en série $\sum_{n=0}^{\infty} i^n x^n \frac{\sin^n(t)}{n!}$. Permuter série et intégrale au moyen du théorème d'intégration terme à terme d'une série.

$$\begin{aligned} \text{II.C.1)} \quad I_{nk} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i^k e^{-int} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^k dt \\ &= \frac{1}{2^{k+1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \exp(i(2m - k - n)t) dt \end{aligned}$$

$$\text{On prend } A_{mk} = \frac{1}{2^k} \binom{k}{m}$$

II.C.2) Si $n > k$ ou si $k - n$ est impair, toutes les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(2m - k - n)t) dt$ sont nulles.

Si $k = n + 2p$, la seule intégrale non nulle est obtenue pour $m = n + p$ et vaut 2π . Dans ce cas,

$$I_{kn} = (-1)^p A_{n+p, n+2p} = \frac{(-1)^p}{2^{n+2p}} \binom{n+2p}{n+p}$$

II.C.3) On ne garde dans la série définissant $\varphi_n(x)$ que les indices $k = n + 2p$, $p \geq 0$. On obtient :

$$\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{n+2p}}{(n+2p)!} \frac{(-1)^p}{2^{n+2p}} \binom{n+2p}{n+p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{x^{n+2p}}{2^{n+2p}}$$

La formule est vraie pour tout x réel (cf II.B) donc le rayon est infini.

II.C.4) φ_n est une série entière.

II.D) Il suffit de vérifier que $n\varphi_n(x) + x\varphi_n(x)' = x\varphi_{n-1}(x)$. Les coefficients du terme de degré $n+2p$ (les autres coefficients sont nuls) de chaque membre valent respectivement :

$$n \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{1}{2^{n+2p}} + (n+2p) \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{1}{2^{n+2p}} = (2n+2p) \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{1}{2^{n+2p}}$$

et
$$\frac{(-1)^p}{p!(n-1+p)!} \frac{1}{2^{n-1+2p}}$$

Ils sont bien égaux.

II.E.1) $\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{x^2}{4(p+1)(n+p+1)}$ donc $\frac{a_{p+1}}{a_p} \leq 1$ dès que $\frac{x^2}{4(p+1)(n+p+1)} \leq 1$. p_0 est le plus petit entier pour lequel cette inégalité est vérifiée.

II.E.2) Utiliser le critère de majoration du reste d'une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue. Le reste est du signe de son premier terme et sa valeur absolue de ce reste est inférieure ou égale à celle de ce premier terme. Donc :

$$|R_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)!(n+N+1)!} \frac{x^{n+2N+2}}{2^{n+2N+2}}$$

Choisir $N \geq p_0$ tel que $\frac{1}{(N+1)!(n+N+1)!} \frac{x^{n+2N+2}}{2^{n+2N+2}} < \varepsilon$

II.E.3) On part de $a_0 = \frac{1}{n!} \frac{x^n}{2^n}$. On prend une variable tg qui stocke la valeur courante de $(-1)^p a_p$. On

passse d'une valeur à la suivante en utilisant la relation $(-1)^{p+1} a_{p+1} = -(-1)^p a_p \times \frac{x^2}{4(p+1)(n+p+1)}$.

On s'arrête dès que $\frac{x^2}{4(p+1)(n+p+1)} \leq 1$ et que $|tg| < \varepsilon$.

```

CalculPhi := proc(n,x,epsilon)
local S,tg,p;
tg := 1/n! * x^n/2^n;
S := tg;
p := 0;
while x^2/(4*(p+1)*(n+p+1)) > 1 or abs(tg) > epsilon do
    tg := -tg * x^2/(4*(p+1)*(n+p+1));
    S := S+tg;
    p := p+1;
od;
S;
end;
```

Partie III

$$\text{III.A.1)} \quad \varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{x^{n+2p}}{2^{n+2p}}$$

$$\varphi_n(x)' = \sum_{p=0}^{\infty} (n+2p) \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{x^{n+2p-1}}{2^{n+2p}}$$

$$\varphi_n(x)'' = \sum_{p=0}^{\infty} (n+2p)(n+2p-1) \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{x^{n+2p-2}}{2^{n+2p}}$$

On remplace, ce qui donne, avec un changement d'indice dans $x^2 \varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} (n+2p)(n+2p-1) \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{x^{n+2p}}{2^{n+2p}} + \sum_{p=0}^{\infty} (n+2p) \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{x^{n+2p}}{2^{n+2p}} \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(p-1)!(n+p-1)!} \frac{x^{n+2p}}{2^{n+2p-2}} - n^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \frac{x^{n+2p}}{2^{n+2p}} \end{aligned}$$

Le coefficient du terme général est, après factorisation par $\frac{(-1)^p}{2^{n+2p}}$:

$$(n+2p)(n+2p-1) \frac{1}{p!(n+p)!} + (n+2p) \frac{1}{p!(n+p)!} - \frac{4}{(p-1)!(n+p-1)!} - \frac{n^2}{p!(n+p)!}$$

Si on met $\frac{1}{p!(n+p)!}$ en facteur, il reste :

$$(n+2p)(n+2p-1) + n+2p - 4p(n+p) - n^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{III.A.2)} \quad y &= \frac{z}{\sqrt{x}} \\ y' &= \frac{z'}{\sqrt{x}} - \frac{z}{2x^{3/2}} \\ y'' &= \frac{z''}{\sqrt{x}} - \frac{z'}{x^{3/2}} + \frac{3z}{4x^{5/2}} \end{aligned}$$

Si on remplace dans l'équation différentielle $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, on obtient :

$$z''x^{3/2} - z'\sqrt{x} + \frac{3z}{4\sqrt{x}} + z'\sqrt{x} - \frac{z}{2\sqrt{x}} + zx^{3/2} - n^2 \frac{z}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow z'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2} - \frac{n^2}{x^2}\right) z = 0$$

$$\text{Donc } q(x) = 1 + \frac{1}{4x^2} - \frac{n^2}{x^2}$$

III.A.3) S'il existe $x_0 > 0$ tel que $z(x_0) = z'(x_0) = 0$, appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Donc, si $z(\alpha) = 0$, alors $z'(\alpha) \neq 0$. En déduire que z est strictement monotone dans un voisinage de α .

III.A.4) Poser $z = \sqrt{x} \varphi_n(x)$ et appliquer les questions qui précèdent.

III.B.1) La solution générale de l'équation sans second membre est $z = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$. On cherche une solution particulière sous la forme $z = \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x)$ avec la condition $z' = -\lambda(x) \sin(x) + \mu(x) \cos(x)$, ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} \lambda'(x) \cos(x) + \mu'(x) \sin(x) = 0 \\ -\lambda'(x) \sin(x) + \mu'(x) \cos(x) = g(x) \end{cases}$$

Donc $\lambda'(x) = -g(x) \sin(x)$ et $\mu'(x) = g(x) \cos(x)$. Il en résulte que :

$$z'' + z = g \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbf{R}^2, \forall x,$$

$$\begin{aligned} z(x) &= A \cos(x) + B \sin(x) - \cos(x) \int_{x_0}^x g(u) \sin(u) \, du + \sin(x) \int_{x_0}^x g(u) \cos(u) \, du \\ &= A \cos(x) + B \sin(x) + \int_{x_0}^x g(u) \sin(x-u) \, du \end{aligned}$$

Ecrire ensuite que :

$$z'' + z = -\frac{\lambda z(x)}{x^2} \Leftrightarrow \exists g, z'' + z = g \text{ et } \forall x > 0, g(x) = -\frac{\lambda z(x)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists g, \forall x > 0, z(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \int_{x_0}^x g(u) \sin(x-u) \, du \text{ et } g(x) = -\frac{\lambda z(x)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x > 0, z(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \lambda \int_{x_0}^x z(u) \frac{\sin(u-x)}{u^2} \, du$$

III.B.2) a) $h'(x) = \frac{|z(x)|}{x^2} \leq \frac{|A| + |B|}{x^2} + \frac{|\lambda|}{x^2} h(x)$ d'où $\mu = |\lambda|$ et $M = |A| + |B|$.

b) $\exp\left(\frac{\mu}{x}\right) (h'(x) - \frac{\mu}{x^2} h(x)) \leq \exp\left(\frac{\mu}{x}\right) \frac{M}{x^2}$

Donc $\exp\left(\frac{\mu}{x}\right) (h'(x) - \frac{\mu}{x^2} h(x)) - \exp\left(\frac{\mu}{x}\right) \frac{M}{x^2} \leq 0$, or le membre de gauche est la dérivée de la fonction $x \rightarrow \exp\left(\frac{\mu}{x}\right) h(x) + \exp\left(\frac{\mu}{x}\right) M$. Cette fonction décroît et est strictement positive, donc elle converge en $+\infty$. Il existe L tel que $\exp\left(\frac{\mu}{x}\right) h(x) + \exp\left(\frac{\mu}{x}\right) M \rightarrow L$ donc $h(x) = L - M + o(1)$ donc

$$h(x) = -M + (L + o(1)) \exp\left(-\frac{\mu}{x}\right)$$

donc $h(x) \rightarrow L - M$ quand x tend vers $+\infty$. h étant continue sur $[x_0, +\infty[$ et admettant une limite en $+\infty$, elle est bornée. Utiliser le III.B.1) pour voir que z est la somme de trois fonctions bornées, donc est bornée.

III.B.3) z étant bornée, majorer la valeur absolue de l'intégrale par $\|z\|_\infty \int_x^\infty \frac{du}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$. Il reste

ensuite à réduire $A \cos(x) + B \sin(x)$ sous la forme $\alpha \cos(x - \beta)$.

III.B.4) Appliquer ce qui précède avec $z(x) = \sqrt{x} \varphi_n(x)$

Partie IV

IV.A) Reprendre le II.E.2) avec $n = 0$ et $x = 3$. $\varphi_0(3) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!^2} \frac{9^p}{4^p}$. Le rang p_0 à partir duquel le

terme général $\frac{1}{p!^2} \frac{9^p}{4^p}$ décroît est tel que $\frac{x^2}{4(p_0 + 1)^2} \leq 1$ donc $p_0 = 1$ convient. Prendre $N = 3$. On a

alors $S_N = -0,3007812500$ et $0 \leq R_N \leq a_{N+1} = \frac{9^4}{24^2 \times 4^4} = 0,04449462891$, donc $\varphi_0(3) < 0$. Comme $\varphi_0(0) = 1$, φ_0 s'annule entre 0 et 3.

IV.B) Par récurrence, $\varphi_{n-1} > 0$ sur $]0, \alpha[$ donc φ_n est strictement croissante, et comme $\varphi_n(0) = 0$ pour $n > 0$, $\varphi_n > 0$ sur $]0, \infty[$.

IV.C.1) $q(x) = 1 + \frac{1}{4x^2} - \frac{n^2}{x^2} \rightarrow 1$ quand n tend vers $+\infty$, et $1 > c^2$.

IV.C.2) $W'(x) = z z_1'' - z'' z_1 = z z_1 (q - c^2)$

IV.C.3) Supposons par exemple $\varphi_n > 0$ sur I_a . Donc $z > 0$ sur I_a . On a aussi $z_1 > 0$ sur I_a . Comme $q > c^2$ sur I_a , $W' > 0$, donc W croît strictement. Or $W(a) = cz(a) > 0$ et $W(a + \frac{\pi}{c}) = -cz(a + \frac{\pi}{c}) < 0$ ce qui est absurde. Donc φ_a s'annule dans I_a .
Le cas $\varphi_n < 0$ est comparable.

IV.D.1) Suivre l'indication de l'énoncé en se rappelant (III.A.4) que les zéros de φ_n sont isolés. Utiliser également cette dernière propriété pour voir que la suite des $a_k^{(n)}$, si elle ne tendait pas vers l'infini, serait convergente vers une limite l et que l serait un zéro non isolé.

IV.D.2) Pour j assez grand, on se trouve dans les hypothèses du IV). Utiliser un intervalle I_a avec $a = a_{j+k}^{(n)}$ et appliquer IV.C.3).