

Partie I

I.1.

I.1.1. Pour tout complexe z , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (de somme e^z), donc également la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!}$ est $+\infty$.

I.1.2.

$$S(0) = 1 \text{ et pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, S(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

I.2.

I.2.1. La fonction f est continue sur le disque ouvert $D(0, R)$, en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence R . Or f n'est pas définie, ni prolongeable par continuité en $2i\pi$, donc

$$2\pi \leq R.$$

I.2.2.

$$B_0 = f(0) = 1$$

I.2.3. Pour tout complexe z tel que $|z| < 2\pi$, $S(z)f(z) = 1$. En utilisant le théorème relatif au produit de deux séries entières,

si $|z| < 2\pi$, $f(z)S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{p=0}^n \frac{B_p}{p!} \frac{1}{(n-p+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=0}^n C_{n+1}^p B_p.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction 1, on en déduit que $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n = 0. \text{ On obtient pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^p B_p + (n+1)B_n = 0.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^p B_p.$$

On sait que B_0 est rationnel; si pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ sont rationnels, la formule de récurrence précédente prouve que B_n l'est également.

Par récurrence, on en déduit que tous les coefficients B_n , pour $n \in \mathbb{N}$, sont rationnels.

I.2.4.

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}.$$

I.2.5. Soit $z \in D(0, 2\pi)$. Si $z \neq 0$,

$$f(z) - f(-z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{e^{-z} - 1} = z \frac{e^z + e^{-z} - 2}{(e^z - 1)(e^{-z} - 1)} = -z, \text{ ce qui est encore vrai pour } z = 0.$$

$$\text{Pour tout } z \in D(0, 2\pi), \quad f(z) - f(-z) = -z.$$

Or $f(z) = B_0 + B_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$, $f(-z) = B_0 - B_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} z^n$.

On obtient pour tout $z \in D(0, 2\pi)$, $-z = 2B_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1 - (-1)^n) B_n}{n!} z^n$

Par unicité du développement en série entière de la fonction $z \rightarrow -z$, on retrouve que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 2$, $\frac{(1 - (-1)^n) B_n}{n!} = 0$.

On a alors,

$$\text{Pour tout } k \geq 1, B_{2k+1} = 0.$$

I.3.

I.3.1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{f(4z) - f(2z)}{z} &= \frac{4}{(e^{2z} - 1)(e^{2z} + 1)} - \frac{2}{e^{2z} - 1} \\ &= \frac{2(1 - e^{2z})}{e^{4z} - 1} \\ &= \frac{-2}{e^{2z} + 1}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\Delta(z) = 1 + \frac{f(4z) - f(2z)}{z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$.

Pour $z = 0$, l'égalité est encore vraie en considérant $\lim_{z \rightarrow 0} \Delta(z)$.

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z} \cup \{0\}, \quad 1 + \frac{f(4z) - f(2z)}{z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

I.3.2. Remarquons que si $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{th } x$ et si $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = i \tan x$.

D'autre part, si $|z| < \frac{\pi}{2}$, $|4z| < 2\pi$ et $|2z| < 2\pi$. On a alors, en tenant compte du fait que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et $B_{2k+1} = 0$ si $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(4z) &= 1 - 2z + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4^{2p} B_{2p}}{(2p)!} z^{2p}, \quad f(2z) = 1 - z + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2^{2p} B_{2p}}{(2p)!} z^{2p}, \text{ d'où} \\ 1 + \frac{f(4z) - f(2z)}{z} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} 2^{2p} (2^{2p} - 1) z^{2p-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!} 2^{2p+2} (2^{2p+2} - 1) z^{2p+1}. \end{aligned}$$

En particulier, si x est réel et $|x| < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{th } x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!} 2^{2p+2} (2^{2p+2} - 1) x^{2p+1}$$

De même, $\tan x = \frac{1}{i} \Delta(ix)$, soit

$$\tan x = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!} 2^{2p+2} (2^{2p+2} - 1) x^{2p+1}$$

Notons R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières précédentes.

$R_1 = R_2 = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \left(\left| \frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!} 2^{2p+2} (2^{2p+2} - 1) \right| r^{2p+1} \right)_p \text{ est bornée} \}$ et comme ces deux séries entières sont absolument convergentes si $|x| < \frac{\pi}{2}$, $R_1 = R_2 \geq \frac{\pi}{2}$. D'autre part la fonction $\tan$ n'étant pas définie ni prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$, $R_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

$$R_1 = R_2 = \frac{\pi}{2} .$$

I.4.

I.4.1. Pour tous complexes x et z , $e^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} z^n$ et si $|z| < 2\pi$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$.

En utilisant le théorème relatif au produit de deux séries entières, on en déduit que pour tous complexes x et z tels que $|z| < 2\pi$,

$$f(z)e^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \text{ où pour tout } n, c_n = \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} \frac{B_{n-p}}{(n-p)!} .$$

On a alors $f(z)e^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x) \frac{z^n}{n!}$ où pour tout entier n et pour tout réel x ,

$$\beta_n(x) = \sum_{p=0}^n C_n^p x^p B_{n-p} .$$

Pour tout entier n , β_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant $C_n^n B_0 = 1$.
 $\beta_n(0) = C_n^0 B_n = B_n$.

I.4.2. Soit $k \geq 0$ et $x \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \beta_{k+1}(x) - \beta_{k+1}(x) &= \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p ((x+1)^p - x^p) B_{k+1-p} \\ &= \sum_{p=1}^{k+1} C_{k+1}^p \left(\sum_{h=0}^{p-1} C_p^h x^h \right) B_{k+1-p} \\ &= \sum_{h=0}^k x^h \left(\sum_{p=h+1}^{k+1} C_{k+1}^p C_p^h B_{k+1-p} \right) \\ &= \sum_{h=0}^k x^h \left(\sum_{p=h+1}^{k+1} \frac{(k+1)!}{p!(k+1-p)!} \frac{p!}{h!(p-h)!} B_{k+1-p} \right) \\ &= \sum_{h=0}^k C_{k+1}^h x^h \left(\sum_{p=h+1}^{k+1} C_{k+1-h}^{p-h} B_{k+1-p} \right) \\ &= \sum_{h=0}^k C_{k+1}^h x^h \left(\sum_{l=1}^{k+1-h} C_{k+1-h}^l B_{k+1-h-l} \right) \\ &= \sum_{h=0}^k C_{k+1}^h x^h \left(\sum_{q=0}^{k-h} C_{k+1-h}^q B_q \right) \end{aligned}$$

Or si $n \geq 1$, $\sum_{q=0}^n C_{n+1}^q B_q = 0$. Dans la somme précédente reste donc uniquement le terme correspondant à $h = k$, de valeur $C_{k+1}^k x^k B_0 = (k+1)x^k$.

$$\beta_{k+1}(x+1) - \beta_{k+1}(x) = (k+1)x^k .$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_{k,N} = \sum_{n=1}^N n^k = \sum_{n=0}^N n^k$.

$$S_{k,N} = \frac{1}{k+1} \sum_{n=0}^N (\beta_{k+1}(n+1) - \beta_{k+1}(n)) = \frac{1}{k+1} (\beta_{k+1}(N+1) - \beta_{k+1}(0)).$$

Comme $\beta_{k+1}(0) = B_{k+1}$,

$$\sum_{n=1}^N n^k = \frac{1}{k+1} \left(\beta_{k+1}(N+1) - B_{k+1} \right)$$

I.4.3. Pour tous complexes x et z avec $|z| < 2\pi$, $|-z| < 2\pi$ et $h(1-x, -z) = f(-z)e^{-z}e^{xz}$.

Or $f(-z)e^{-z} = -\frac{ze^{-z}}{e^{-z}-1} = -\frac{z}{1-e^z} = f(z)$. D'où

$$h(1-x, -z) = h(x, z)$$

Soit $x \in \mathbb{C}$, fixé. L'égalité précédente et l'unicité du développement en série entière de $z \mapsto h(x, z)$ prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_n(1-x) = (-1)^n \beta_n(x)$$

En particulier

$$\beta_n(1) = (-1)^n \beta_n(0) = (-1)^n B_n.$$

I.4.4. En admettant que l'on peut dériver terme à terme, pour tout réel x et tout $z \in D(0, 2\pi)$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Mais on a aussi $\frac{\partial h}{\partial x}(x, z) = zh(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x) \frac{z^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{n-1}(x) n \frac{z^n}{n!}$. Par unicité du développement en série entière, à x fixé de $z \mapsto zh(x, z)$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta'_n(x) = n\beta_{n-1}(x)$. Comme ce résultat est valable pour tout réel x , on obtient l'égalité des deux polynômes.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta'_{n+1} = (n+1)\beta_n.$$

Soit $n \geq 1$.

$$I_n = \int_0^1 \beta_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \beta'_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1} (\beta_{n+1}(1) - \beta_{n+1}(0)).$$

$$\beta_{n+1}(1) - \beta_{n+1}(0) = ((-1)^{n+1} - 1)B_{n+1}$$

Si n est pair, $n+1$ est un entier impair supérieur à 2, donc $B_{n+1} = 0$.

Si n est impair, $(-1)^{n+1} - 1 = 0$ Dans tous les cas,

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \int_0^1 \beta_n(x) dx = 0$$

Partie II

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après I.4.1, $\beta_n(x) = \sum_{p=0}^n C_n^p x^p B_{n-p}$. On connaît B_0, B_1, B_2, B_3 calculés en I.2.4.

On en déduit

$$\beta_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad \beta_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \beta_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

remarque on aurait pu également déterminer ces trois polynômes en utilisant uniquement les formules de récurrence (i) et (ii). Le texte de la question est ici un peu ambigu.

II.2.

II.2.1. D'après I 4 3, $\beta_2(1-x) = \beta_2(x)$. On en déduit que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $\Phi_2(x) = \Phi_2(2\pi - x)$, puis par 2π périodicité que Φ_2 est paire.

Comme Φ_2 est 2π périodique, continue sur $[0, 2\pi[$, pour montrer la continuité sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que Φ_2 est continue à gauche en 0, ce qui est assuré par la parité de Φ_2 : $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y < 0}} \Phi_2(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \Phi_2(-x) = \Phi_2(0)$.

II.2.2. Comme Φ_2 est paire, les coefficients $b_n(\Phi_2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(\Phi_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi_2(t) \cos nt \, dt = 4 \int_0^{1/2} \beta_2(x) \cos(2\pi nx) \, dx$, en effectuant le changement de variable $x = \frac{t}{2\pi}$.

$$a_0(\Phi_2) = 0$$

Pour $n \geq 1$, après deux intégrations par parties,

$$a_n(\Phi_2) = \frac{1}{n^2 \pi^2}.$$

La fonction Φ_2 est continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et C^1 par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de Φ_2 converge normalement vers Φ_2 sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2 \pi^2}.$$

II.3.

II.3.1. Montrons que pour tout $k \geq 2$, Φ_k est continue sur $\mathbb{R}$.

Le raisonnement est le même qu'en II.2.1 : soit $k \geq 2$, la fonction Φ_k est 2π périodique et continue sur $[0, 2\pi[$ car β_k est continue sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'établir la continuité en 0, à gauche.

Or $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y < 0}} \Phi_k(y) = \lim_{\substack{y \rightarrow 2\pi \\ y < 2\pi}} \Phi_k(y) = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \beta_k(t) = \beta_k(1)$.

Or $\beta_k(1) = (-1)^k \beta_k(0) = (-1)^k B_k$ d'après I.4.3. Si k est pair, $\beta_k(1) = \beta_k(0)$. Si k est impair, comme $k \geq 2$, $B_k = 0$ et $\beta_k(1) = \beta_k(0) = 0$.

On a donc $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y < 0}} \Phi_k(y) = \Phi_k(0)$, ce qui assure la continuité à gauche de Φ_k en 0 et la continuité de Φ_k sur $\mathbb{R}$.

Soit $k \geq 3$. Φ_k est dérivable sur $[0, 2\pi[$ de dérivée:

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad \Phi'_k(x) = \frac{1}{2\pi} \beta'_k\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{k}{2\pi} \beta_{k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{k}{2\pi} \Phi_{k-1}(x).$$

Comme $k-1 \geq 2$, Φ_{k-1} est 2π périodique, continue sur $\mathbb{R}$. Φ_k est 2π périodique, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et admet en 0 des dérivées à droite et à gauche, $\Phi'_k d(0) = \frac{k}{2\pi} \Phi_{k-1}(0)$ et $\Phi'_k g(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2\pi \\ x < 2\pi}} \frac{k}{2\pi} \Phi_{k-1}(x) = \frac{k}{2\pi} \Phi_{k-1}(0)$.

On en déduit que :

$$\text{Pour } k \geq 3, \Phi_k \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \Phi'_k = \frac{k}{2\pi} \Phi_{k-1}.$$

Montrons par récurrence sur $k \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante :

$$''\Phi_k \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ et } \Phi_k^{(k-2)} = \frac{k!}{2^{k-1} \pi^{k-2}} \Phi_2.''$$

• On vient d'établir $\mathcal{P}_3$.

• Supposons $\mathcal{P}_k$ vérifiée pour un certain $k \geq 3$. De $\Phi'_{k+1} = \frac{k+1}{2\pi} \Phi_k$, on déduit que Φ_{k+1} est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et que $\Phi_{k+1}^{(k-1)} = \frac{k+1}{2\pi} \Phi_k^{(k-2)} = \frac{(k+1)!}{2^k \pi^{k-1}} \Phi_2$ par hypothèse de récurrence. $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée et la récurrence est établie.

II.3.2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction 2π périodique Φ_{2p} est de classe $\mathcal{C}^{2p-2}$ et $\Phi_{2p}^{(2p-2)} = \alpha_p \Phi_2$ en notant $\alpha_p = \frac{(2p)!}{2^{2p-1} \pi^{2p-2}}$.

Comme Φ_2 est paire, on en déduit que Φ_{2p} est paire (ce que l'on pouvait également déduire de I.4.3). Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\Phi_{2p}) = 0$.

De plus les relations entre les coefficients de Fourier d'une fonction et ceux de ses dérivées donnent:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(\Phi_{2p}^{(2p-2)}) = (-1)^{p-1} n^{2p-2} a_n(\Phi_{2p}).$$

On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n(\Phi_{2p}) = \frac{(-1)^{p-1} (2p)!}{2^{2p-1} \pi^{2p} n^{2p}}$$

$$\text{Enfin, } a_0(\Phi_{2p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta_{2p}\left(\frac{t}{2\pi}\right) dt = 2 \int_0^1 \beta_{2p}(x) dx = 0.$$

$$a_0(\Phi_{2p}) = 0$$

La fonction Φ_{2p} , pour $p \geq 1$ est 2π périodique, continue sur $\mathbb{R}$ de classe au moins $\mathcal{C}^1$ si $p \geq 2$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux si $p = 1$. D'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de Φ_{2p} converge normalement vers Φ_{2p} sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{2p}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1} (2p)!}{2^{2p-1} \pi^{2p} n^{2p}} \cos(nx)$$

II.3.3. L'égalité précédente appliquée à $x = 0$ donne

$$\Phi_{2p}(0) = \beta_{2p}(0) = B_{2p} = \frac{(-1)^{p-1} (2p)!}{2^{2p-1} \pi^{2p}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{(-1)^{p-1} 2^{2p-1} \pi^{2p} \beta_{2p}(0)}{(2p)!}.$$

Partie III

III.1. Soit $x > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0, $\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-2} = \frac{1}{t^{2-x}}$. Comme $x > 1$, $2 - x < 1$ et cette fonction est intégrable sur $]0, 1]$ donc aussi $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ par comparaison.

En $+\infty$, $\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{x-1} e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ et finalement intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.2. Notons $f : (x, t) \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{e^{(x-1) \ln t}}{e^t - 1}$.

Par théorèmes d'opérations, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k f(x, t)$.

(pour $k = 0$, il s'agit de la fonction f).

Pour tous réels a et b tels que $1 < a < b$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$\forall t \in]0, 1], \quad |f(x, t)| \leq \frac{t^{a-1}}{e^t - 1} = f(a, t)$$

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad |f(x, t)| \leq \frac{t^{b-1}}{e^t - 1} = f(b, t)$$

Finalement, pour tout $x \in [a, b]$, $\forall t \in]0, +\infty[$, $|f(x, t)| \leq f(a, t) + f(b, t)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $c > 1$, notons $\varphi_{k,c} : t \mapsto |(\ln t)^k f(c, t)|$.

- La fonction $\varphi_{k,c}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- $\varphi_{k,c}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (|\ln t|)^k t^{c-2}$.

Soit α tel que $1 < \alpha < c$, par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\alpha+2} \varphi_{k,c}(t) = 0$ et comme $\alpha > 1$, $t \mapsto t^{\alpha-2}$ est intégrable sur $]0, 1]$. On en déduit que $\varphi_{k,c}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

- $\varphi_{k,c}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} (|\ln t|)^k t^{c-1} e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. La fonction $\varphi_{k,c}$ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ et finalement sur $]0, +\infty[$.

bilan:

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tous réels a et b tels que $1 < a < b$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad |f(x, t)| \leq \varphi_{k,a}(t) + \varphi_{k,b}(t)$$

où la fonction $\varphi_{k,a} + \varphi_{k,b}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions intégrables. La fonction f et toutes ses dérivées partielles (par rapport à x) sont continues et vérifient l'hypothèse de domination sur les segments de $]1, +\infty[$.

On déduit du théorème de dérivation relatif aux intégrales à paramètre que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

III.3.

III.3.1. Soit x fixé, $x > 1$, pour tout $t > 0$, en écrivant $\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}$, comme $e^{-t} \in]0, 1[$, en utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$ sur $] -1, 1[$,

$$\frac{1}{e^t - 1} = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

et donc,

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}$$

III.3.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$. La fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-nt}$ est continue sur $[0, +\infty[$. ($x - 1 > 0$).

En $+\infty$, comme $n \geq 1$, par croissances comparées, $t^{x-1} e^{-nt} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$, ce qui assure l'intégrabilité de cette fonction sur $[0, +\infty[$.

II.3.3. Remarquons tout d'abord que l'intégrabilité pour tout $x > 1$ et pour tout $n \geq 1$ de $t \mapsto t^{x-1} e^{-nt}$ assure l'existence sur $]1, +\infty[$ des fonctions Γ et Γ_n pour $n \geq 2$.

Soit $A > 0$ et $n \geq 1$. Dans l'intégrale $\int_0^A t^{x-1} e^{-nt} dt$, effectuons le changement de variable $\mathcal{C}^1$, $u = nt$.

$$\int_0^A t^{x-1} e^{-nt} dt = \frac{1}{n^x} \int_0^{nA} u^{x-1} e^{-u} du$$

puis en faisant tendre A vers $+\infty$, puisque les fonctions en présence sont intégrables,

$$\forall n \geq 1, \quad \Gamma_n(x) = \frac{1}{n^x} \Gamma(x)$$

III.3.4. Pour tout $x > 1$, en utilisant III.3.1, $F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt$.

Notons, pour tout $n \geq 1$, $u_n : t \mapsto t^{x-1} e^{-nt}$.

- Pour tout $n \geq 1$, u_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après III.3.2.

- La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $h : t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$, continue sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 0$, la fonction u_n est positive sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence pour les séries de fonctions positives sur un intervalle, la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt$ équivaut à l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de la fonction limite h et on a dans ce

$$\text{cas, } \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt.$$

Or on sait d'après III.1 que h est intégrable, on en déduit alors que

$$\text{Pour tout } x > 1, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

De plus pour tout $x > 1$ la fonction continue, intégrable $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est à valeurs strictement positives sur $]0, +\infty[$, donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt > 0$. D'où

$$\text{Pour tout } x > 1, \quad \frac{F(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

III.4.

III.4.1. Soit $k \geq 3$, ε et A deux réels strictement positifs.. En effectuant une intégration par parties dans

$\int_{\varepsilon}^A t^{k-1}e^{-t} dt$, on obtient :

$$\int_{\varepsilon}^A t^{k-1}e^{-t} dt = \varepsilon^{k-1}e^{-\varepsilon} - A^{k-1}e^{-A} + (k-1) \int_{\varepsilon}^A t^{k-2}e^{-t} dt$$

Comme les fonctions en présence sont intégrables sur $]0, +\infty[$, que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{k-1}e^{-\varepsilon} = 0$, que $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{k-1}e^{-A} = 0$, par croissances comparées, en faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient :

$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1)$$

Remarquons que la fonction Γ est définie en $x = 1$ et que le calcul précédent est encore valable pour $k = 2$.

III.4.2. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Par récurrence facile,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Gamma(k) = (k-1)!$$

puis en utilisant III.3.4

$$\forall k \geq 2, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{\Gamma(k)}{(k-1)!}$$