

* BANQUE FILIERE PT *

Epreuve de Mathématiques II-B

durée 4h

Le problème étudie certaines notions mathématiques qui interviennent en mécanique des milieux continus.

La partie I s'intéresse aux surfaces de niveau de deux fonctions rattachées à des critères de résistance des matériaux. La partie II est consacrée à l'étude d'une représentation plane des contraintes autour d'un point d'un milieu continu. La partie III comporte deux exemples simples d'utilisation de ces notions.

R^2 et R^3 sont munis de leur structure euclidienne canonique. On note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de 2 éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de R^n ($n = 2$ ou 3) et $\|\vec{u}\|$ la norme euclidienne de $\vec{u}$. Les éléments de R^n sont appelés indifféremment vecteurs ou points.

Partie 1

R^3 est rapporté à la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit p , la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
2. On définit une nouvelle base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par les conditions suivantes :

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad \text{et} \quad \vec{J} = \frac{p(\vec{k})}{\|p(\vec{k})\|}$$

Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Peut-on obtenir son inverse sans calcul ?

On définit les applications de R^3 dans R par :

$$f(M) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$$

$$g(M) = g(x, y, z) = \max[|x - y|, |y - z|, |z - x|]$$

et on désigne pour tout α réel par S_α et Σ_α les surfaces d'équations respectives $f(x, y, z) = \alpha$ et $g(x, y, z) = \alpha$.

3. Que peut-on dire de S_α et Σ_α si $\alpha < 0$ et lorsque $\alpha = 0$?
On suppose désormais que $\alpha > 0$.
4. Soit M un élément de R^3 et $M' = p(M)$, comparer $f(M)$ et $f(M')$, $g(M)$ et $g(M')$. Que peut-on en conclure sur la nature géométrique de S_α et Σ_α ?
5. Montrer que S_α est une surface de révolution dont on précisera l'axe.
6. Montrer que Σ_α est invariante par la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - y = 0$. Trouver deux autres plans de symétrie analogues de Σ_α .

7. Soit r , la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe orienté par le vecteur $\vec{K}$. Montrer que Σ_α est invariante par cette rotation.
8. Déterminer l'intersection de Σ_α et P . Représenter sur une même figure l'intersection de Σ_α et P et celle de S_α et P pour $\alpha = \sqrt{2}$.

Partie II

Soit s un endomorphisme symétrique de R^3 , de valeurs propres σ_1, σ_2 et σ_3 . On désigne par $\mathcal{B}_s$ une base orthonormée de vecteurs propres de s . Pour tout vecteur unitaire $\vec{u}$ de R^3 , on décompose le vecteur $s(\vec{u})$ en un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et un vecteur orthogonal à $\vec{u}$, sous la forme :

$$s(\vec{u}) = \alpha(\vec{u})\vec{u} + t(\vec{u}) \quad \text{où} \quad \vec{u} \cdot t(\vec{u}) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(\vec{u}) \text{ est réel et } t(\vec{u}) \text{ est un élément de } R^3$$

On pose alors $\beta(\vec{u}) = \|t(\vec{u})\|$. On associe à $\vec{u}$ le point $m(\vec{u}) = (\alpha(\vec{u}), \beta(\vec{u}))$ de R^2 lorsque $\vec{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3 .

1. Soit (u_1, u_2, u_3) , les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}_s$. Expliciter $s(\vec{u})$ dans la base $\mathcal{B}_s$. Calculer alors $\alpha(\vec{u})$ et $\|s(\vec{u})\|$. En déduire $(\beta(\vec{u}))^2$.
2. Soit $(x, y) \in R \times R_+$. Montrer que si il existe un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $m(\vec{u}) = (x, y)$, le triplet (u_1^2, u_2^2, u_3^2) est solution du système :

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$\sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + \sigma_3 X_3 = x$$

$$\sigma_1^2 X_1 + \sigma_2^2 X_2 + \sigma_3^2 X_3 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

3. On suppose jusqu'à la fin de la question que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

- (a) Résoudre le système (1) et expliciter X_1, X_2, X_3 en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, x$ et y .
- (b) Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $m(\vec{u}) = (x, y)$ si et seulement si :

$$y^2 + (x - \sigma_2)(x - \sigma_3) \geq 0$$

$$y^2 + (x - \sigma_1)(x - \sigma_3) \leq 0$$

$$y^2 + (x - \sigma_1)(x - \sigma_2) \geq 0$$

- (c) Représenter pour $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-1, 1, 4)$, l'ensemble de R^2 décrit par le point $m(\vec{u})$ lorsque $\vec{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3 .

4. On suppose jusqu'à la fin de la question que $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$.

- (a) Calculer X_1 et $X_2 + X_3$ solutions du système formé des deux premières lignes de (1). Quelles relations x et y doivent ils vérifier pour que le système (1) ait des solutions ?

- (b) Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $m(\vec{u}) = (x, y)$ si et seulement si :

$$y^2 + (x - \sigma_1)(x - \sigma_2) = 0$$

- (c) Représenter pour $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-1, 4, 4)$, l'ensemble de R^2 décrit par le point $m(\vec{u})$ lorsque $\vec{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3 .

5. On suppose maintenant que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Quel est dans ce cas l'ensemble de R^2 décrit par le point $m(\vec{u})$ lorsque $\vec{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3 .
6. s étant un endomorphisme symétrique quelconque de R^3 , de valeurs propres σ_1, σ_2 et σ_3 , on désigne par $T(s)$, la valeur maximale de $\beta(\vec{u})$ lorsque $\vec{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de R^3 . Montrer que $T(s)$ s'exprime facilement en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3 et de la fonction g définie dans la partie I.

Partie III

La modélisation des contraintes développées dans un matériau soumis à des sollicitations extérieures et occupant un domaine géométrique Ω de R^3 conduit à attacher à tout point M de Ω un endomorphisme symétrique s_M qui décrit l'état de contrainte autour de M . Un critère de résistance du matériau est alors que pour tout point M de Ω on ait $T(s_M) \leq R$ où T a été défini dans la partie précédente et où R est une constante positive dépendant du matériau. On étudie dans cette partie deux exemples simples d'application de ce critère.

1. Si un tube est soumis à un chargement combiné de traction torsion, l'endomorphisme s_M est défini, en chaque point M , dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associée aux coordonnées cylindriques par la matrice :

$$A_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont des constantes indépendantes de M .

- (a) Calculer $T(s_M)$.
- (b) Dans le cas de la traction simple ($b = 0$), déterminer les vecteurs unitaires $\vec{u}$ du plan de base $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ tels que $\beta(\vec{u}) = T(s_M)$.
- (c) La constante a de la matrice précédente est le quotient de l'effort de traction par l'aire de la section du tube. Montrer que l'effort de traction supportable sans dommage pour le matériau (c'est à dire vérifiant le critère de résistance) est maximal en traction simple.
2. Une épave est soumise au fond de la mer à des contraintes caractérisées en tout point M par $s_M = -p\underline{I}$ où p est la pression à la profondeur où se trouve l'épave et $\underline{I}$ l'identité de R^3 . Montrer que, quelle que soit la profondeur où se trouve l'épave et selon la modélisation définie dans ce problème, l'épave n'est pas endommagée par la pression.