

Corrigé

CCP - MP - Maths 1 - 2018

ESTIMATIONS NUMÉRIQUES D'INTÉGRALES

Partie I - « Permutation limite-intégrale » et intégrale de Gauss

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, série entière de rayon de convergence infini.

En intégrant la série entière sur $[0, 1]$, segment inclus dans le disque ouvert de convergence, on obtient :
$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

On a bien
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Q2. On applique le critère des séries alternées :

- pour tout n , $\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est du signe de $(-1)^n$
- $\left(\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \right| \right)$ est une suite décroissante
- $\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

En notant r_n le reste d'ordre n de la série, on a donc $|I - s_n| = |r_n| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(n+1)!} \right| = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$

On a donc bien
$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

Q3.

```
def factorielle(n):  
    if n <= 1:  
        return 1  
    return n*factorielle(n-1)
```

Q4.

```
N = 1  
while (2*N+3)*factorielle(N+1) < 10**6:  
    N=N+1  
print(N)
```

(on trouve $N=8$)

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q5. Soit $x \in [0, +\infty[$, pour $n > x^2$ on a $1 - \frac{x^2}{n} > 0$ et $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$

$$\text{Or } \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{n}$$

$$\text{donc } n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -x^2 \text{ et } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $x \mapsto e^{-x^2}$

Q6. En étudiant la fonction $t \mapsto \ln(1+t) - t$, on montre que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc, compte tenu de la croissance de l'exponentielle :

$$0 \leq f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq \exp\left(n \left(-\frac{x^2}{n}\right)\right) = e^{-x^2}.$$

$$\text{d'où } |f_n(x)| \leq e^{-x^2}.$$

En utilisant le binôme de Newton :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{2k}}{n^k}$$

On intègre entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{n^k} \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(2k+1)n^k}.$$

On utilise ensuite le théorème de convergence dominée pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx =$

$$\int_0^1 f(x) dx$$

- (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$
- la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ qui est continue sur $[0, 1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq f(x)$ et f est positive, continue et donc intégrable sur $[0, 1]$.

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ et finalement,

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.$$

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Q7. $l_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$. l_i est un polynôme de degré n qui prend la valeur 1 en x_i et qui

s'annule en x_k pour $k \neq i$.

$L_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(X)$. L_n est donc un polynôme de degré $\leq n$ qui prend la valeur $f(x_i)$ au point x_i .

$L_n(f)$ est bien un polynôme interpolateur de f aux points x_i .

Supposons que L_1 et L_2 soient deux polynômes interpolateurs de f aux points x_i . Alors $L_1 - L_2$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui s'annule aux $n + 1$ points x_0, x_1, \dots, x_n .

C'est donc le polynôme nul. On a bien l'unicité du polynôme interpolateur de f aux points x_i .

II.2 - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q8.

```
def lagrange(x, y, a):
    n = len(x)
    S = 0
    for i in range(n):
        P = y[i]
        for k in range(n):
            if k != i:
                P = P*(a-x[k])/(x[i]-x[k])
        S = S + P
    return S
```

Q9.
$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

La matrice du système est donc
$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

La complexité de la résolution de ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss est $O(n^3)$.

II.3 - Expression de l'erreur d'interpolation

Q10. Hypothèse de récurrence d'ordre p : si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction p -fois dérivable qui s'annule $p + 1$ fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

- Pour $p = 1$, d'après le théorème de Rolle, si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable qui s'annule 2 fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$.

- Supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour un entier $p \geq 1$ donné.

Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(p + 1)$ -fois dérivable qui s'annule $p + 2$ fois en $x_0, x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$ avec $x_0 < x_1 < \dots < x_p < x_{p+1}$.

En appliquant le théorème de Rolle sur chacun des $p + 1$ intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on montre que ϕ' s'annule en au moins $p + 1$ points distincts.

ϕ' est donc une fonction p -fois dérivable qui s'annule $p + 1$ fois et d'après l'hypothèse de récurrence il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $(\phi')^{(p)}(c) = 0$, c'est à dire $\phi^{(p+1)}(c) = 0$.

- D'après le principe de récurrence, on a donc montré que :

si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction p -fois dérivable qui s'annule $p + 1$ fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q11. Soit $x \in \sigma$. $f(x) = L_n(f)(x)$ et $\pi_\sigma(x) = 0$.

Donc pour tout $x \in \sigma$, la propriété \mathcal{P}_x est vraie.

Q12. Soit x un réel de $[a, b]$ qui n'est pas dans σ . $\pi_\sigma(x) \neq 0$.

On pose alors
$$\lambda = \frac{f(x) - L_n(f)(x) - F(x)}{\pi_\sigma(x)}$$

Q13. Soit x un réel de $[a, b]$ qui n'est pas dans σ . F s'annule sur σ ($n + 1$ fois) et en $x \notin \sigma$, donc F s'annule $n + 2$ fois.

F est donc une fonction $(n + 1)$ -fois dérivable sur $[a, b]$ (car f est de classe C^{n+1}) et qui s'annule $n + 2$ fois. D'après la question **Q10**, il existe $c_x \in]a, b[$ tel que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$.

$L_n(f)$ est un polynôme de degré $\leq n$, sa dérivée $(n + 1)$ ème est donc nulle.

π_σ est un polynôme unitaire de degré $n + 1$, sa dérivée $(n + 1)$ ème est donc $(n + 1)!$.

Donc $F^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - (n + 1)!\lambda$ et comme $F^{(n+1)}(c_x) = 0$, on obtient $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n + 1)!}$

et donc $\exists c_x \in]a, b[$,
$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n + 1)!} \pi_\sigma(x).$$

Pour $x \notin \sigma$, la propriété \mathcal{P}_x est donc vraie, d'après la question **Q11.**, \mathcal{P}_x est vraie pour $x \in \sigma$.

Donc, la propriété \mathcal{P}_x est vraie pour tout $x \in [a, b]$.

Q14. f est de classe C^{n+1} donc $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc

la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$.

Posons $K = |b - a|$.

Pour tout $x \in [a, b]$, on a alors $|\pi_\sigma(x)| \leq K^{n+1}$ et

$$|f(x) - L_n(f)(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n + 1)!} \pi_\sigma(x) \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} K^{n+1}$$

On a donc bien
$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{K^{n+1}}{(n + 1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Q15. On suppose donnée une suite (x_n) d'éléments deux à deux distincts du segment $[0, 2\pi]$ ce qui permet de définir la suite $(L_n(f))$.

D'après la question précédente avec $K = 2\pi$ et $\|f^{(n+1)}\|_\infty = 1$, on a

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n + 1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, la suite $(L_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$.

Q16. $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$.

On a alors $(-1)^k = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}$ et donc $f^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$.

On en déduit $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|f^{(2k)}\|_\infty \geq (2k)!$.

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

Q17. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à $(1, X)$, on obtient $(1, X)$.

On divise ensuite chaque polynôme par sa norme et on obtient $P_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $P_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}X$.

Q18. $R_{n-1}[X] = \text{Vect}\{1, X, \dots, X^{n-1}\} = \text{Vect}\{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ et la famille (P_0, P_1, P_2, \dots) est orthonormée donc pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $R_{n-1}[X]$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}\{1, X, \dots, X^k\} = \text{Vect}\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ donc $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc le polynôme P_n est de degré n .

Q19. Pour $n \geq 1$ on a $\langle P_n, 1 \rangle = 0$, c'est-à-dire $\int_{-1}^1 P_n(t) dt = 0$

Si P_n ne s'annule pas sur $[-1, 1]$, alors P_n est une fonction continue et de signe constant sur $[-1, 1]$ telle que $\int_{-1}^1 P_n(t) dt = 0$. On aurait donc $P_n(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, P_n aurait une infinité de racines et serait donc nul ce qui est impossible.

P_n admet donc au moins une racine dans $[-1, 1]$.

Q20. On suppose que P_n admet strictement moins de n racines distinctes dans $[-1, 1]$.

Si P_n admet sur $[-1, 1]$ des racines t_1, \dots, t_p de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1) \cdots (X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$.

P_n et Q changent de signe en chaque t_i ou gardent un signe constant si P_n ne possède pas de racines et donc $H = QP_n$ est de signe constant sur $[-1, 1]$.

D'autre part, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc d'après la question **Q18**. $\langle P_n, Q \rangle = 0$, c'est-à-dire

$$\int_{-1}^1 P_n(t)Q(t) dt = 0 \text{ ou } \int_{-1}^1 H(t) dt = 0.$$

H est donc une fonction continue (polynôme) de signe constant et telle que $\int_{-1}^1 H(t) dt = 0$.

De même que dans la question précédente, on a donc $H = 0$ et comme $Q \neq 0$ on a $P_n = 0$ ce qui est impossible.

On a montré par l'absurde que P_n possède au moins n racines distinctes dans $[-1, 1]$ or P_n est un polynôme de degré n , donc P_n admet n racines simples dans $[-1, 1]$.

Partie IV - Méthodes de quadrature

Q21. Dans l'intégrale $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$, on fait le changement de variable $x = x_k + (t+1) \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$,

$$dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} dt.$$

On obtient $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^1 f \left(x_k + (t+1) \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \right) dt$

c'est-à-dire $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt$ avec $g(t) = f \left(x_k + (t+1) \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \right)$.

Q22. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $L_n(P) = P$. (P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui coïncide avec P aux points x_i)

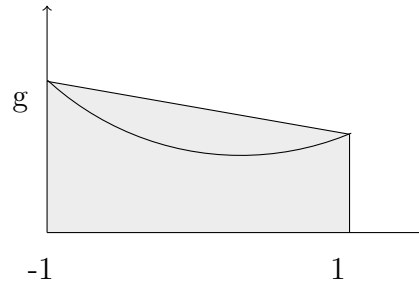
On a donc $J(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

Q23. $l_0(t) = \frac{t-1}{-1-1} = \frac{1-t}{2}$. $\alpha_0 = \int_{-1}^1 l_0(t) dt = 1$.

$l_1(t) = \frac{t+1}{1+1} = \frac{1+t}{2}$. $\alpha_1 = \int_{-1}^1 l_1(t) dt = 1$. $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$

On obtient $J(g) = g(-1) + g(1)$.

C'est l'aire du trapèze représenté ci-dessous :



Quadrature de Gauss

Q24. $J(QP_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i Q(t_i) P_{n+1}(t_i) = 0$ car les t_i sont les racines de P_{n+1} .

$\int_{-1}^1 Q(t) P_{n+1}(t) dt = \langle Q, P_{n+1} \rangle = 0$ car le degré de Q est inférieur ou égal à n (quotient de la division euclidienne d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ par un polynôme de degré $n+1$).

On a donc $J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^1 Q(t) P_{n+1}(t) dt = 0$

$$J(P) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(t_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (Q(t_i) P_{n+1}(t_i) + R(t_i)) = \sum_{i=0}^n \alpha_i R(t_i) = J(R)$$

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \int_{-1}^1 (Q(t) P_{n+1}(t) + R(t)) dt = \int_{-1}^1 R(t) dt$$

Or $R \in \mathbb{R}_n[X]$ (reste de la division euclidienne par un polynôme de degré $n+1$) donc d'après la question **Q22**. $J(R) = \int_{-1}^1 R(t) dt$.

On a donc $J(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

Q25. Soit $P = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (X - t_j)^2$

P est un polynôme de degré $2n$ donc d'après la question précédente $J(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

Or P est un polynôme non nul et toujours > 0 donc $\int_{-1}^1 P(t) dt > 0$ et d'autre part

$$J(P) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(t_i) = \alpha_k \text{ et donc } \alpha_k > 0.$$

Les poids $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont donc strictement positifs

Soit $P = 1$

P est un polynôme de degré 0 donc $J(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

$$J(P) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(t_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i$$

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = 2$$

et donc $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 2$