CAPES interne de Mathématiques
session 1995
deuxième composition

(épreuve annulée)

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag30e]

SESSION DE 1995

concours interne de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche – éventuellement programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Documents interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des figures interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'objet de ce problème est d'étudier, dans le plan, quelques familles finies ou infinies de cercles tangents entre eux et tangents à des droites ou à des cercles donnés.

La première partie traite de cercles tangents entre eux et tangents à deux droites données.

La deuxième partie étudie une famille de cercles, dits cercles de Ford, tangents entre eux et tangents à un cercle et à une droite donnée.

La troisième partie permet d'établir le résultat dit de « l'alternative de Steiner » relative à des familles de cercles tangents entre eux et tangents à deux cercles donnés.

Dans tout le problème on se place dans un plan affine euclidien.

Notations.

Le cercle de centre O et de rayon r sera noté $\mathscr{C}(O, r)$ ou $\mathscr{C}$ s'il n'y a pas de confusion possible.

La distance de deux points A et B sera notée AB.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

CERCLES TANGENTS À DEUX DROITES

A. Quelques résultats élémentaires.

1. On donne dans le plan deux droites distinctes d_1 et d_2, et un point I.

   Donner une construction du ou des cercles tangents aux deux droites et passant par I. On distinguera les cas suivants :

   a. Les droites d_1 et d_2 sont parallèles ;

   b. Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A et le point I est sur l'une de ces deux droites ;

   c. Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A et le point I n'est pas sur l'une de ces deux droites.

   Dans chaque cas, on discutera l'existence et le nombre de solutions selon les positions relatives de d_1, d_2 et I.

2. On donne un cercle $\mathscr{C}(\mathrm{O}, r)$ et deux droites d_1 et d_2 tangentes à ce cercle. On se propose de montrer qu'il existe des cercles distincts et chacun tangent à la fois à d_1, d_2 et $\mathscr{C}(\mathrm{O}, r)$.

   a. Les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

   Montrer qu'il existe deux cercles $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ tangents à la fois à d_1, d_2 et $\mathscr{C}(\mathrm{O}, r)$. On note O$'$ et O$''$ les centres de $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$. Caractériser les translations t' et t'' qui transforment respectivement $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}''$.

   b. Les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A.

   On note $\mathscr{S}$ le secteur du plan intersection :

   $$\begin{cases}\text{du demi-plan fermé de frontière } d_1 \text{ contenant le point O,}\\ \text{et}\\ \text{du demi-plan fermé de frontière } d_2 \text{ contenant le point O.}\end{cases}$$

   On désigne par $\mathscr{C}'(\mathrm{O}', r')$ et $\mathscr{C}''(\mathrm{O}'', r'')$ les cercles tangents à d_1, d_2 et $\mathscr{C}(\mathrm{O}, r)$ contenus dans le secteur $\mathscr{S}$.

   Calculer les longueurs O$'$A, O$''$A, r', r'' en fonction de AO et de r.

   Caractériser les homothéties h' et h'' qui transforment respectivement $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}''$.

   On exprimera le rapport λ' de h' et celui λ'' de h'' en fonction des nombres AO et r.

B. Suites de cercles tangents entre eux et tangents à deux droites.

1. On considère deux droites parallèles d_1 et d_2 et un cercle $\mathscr{C}_0(\mathrm{O}_0, r_0)$ tangent à d_1 et d_2.

   On construit alors la famille de cercles :

   $$\ldots, \mathscr{C}_{-n}, \mathscr{C}_{-n+1}, \ldots, \mathscr{C}_{-2}, \mathscr{C}_{-1}, \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots, \mathscr{C}_{n-1}, \mathscr{C}_n, \ldots$$

   tels que pour tout entier relatif k, $\mathscr{C}_{k+1}$ soit tangent à d_1, d_2 et $\mathscr{C}_k$, et $\mathscr{C}_{k+1} \neq \mathscr{C}_{k-1}$.

   On appelle $\mathscr{F}$ la configuration formée des droites d_1, d_2 et de tous les cercles $\mathscr{C}_k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

   a. Quelle est l'image de $\mathscr{F}$ par l'une ou l'autre des translations t' et t'' de la question I.A.2.*a.* définies à partir du cercle $\mathscr{C}_0$?

   b. Quels sont les éléments de symétrie de $\mathscr{F}$?

2. On considère un cercle $\mathscr{C}_0(O_0, r_0)$ et deux droites d_1 et d_2 sécantes en A et tangentes à $\mathscr{C}_0$ vérifiant les conditions : $r_0 = 6$ et $AO_0 = 10$.

On construit alors la famille de cercles :

$$\mathscr{C}_0,\ \mathscr{C}_1,\ \mathscr{C}_2, \ldots,\ \mathscr{C}_{n-1},\ \mathscr{C}_n,\ \ldots \qquad (\mathscr{C}_n \text{ est de centre } O_n \text{ et de rayon } r_n)$$

tels que pour tout entier naturel k, $\mathscr{C}_{k+1}$ soit tangent à d_1, d_2 et $\mathscr{C}_k$, et $r_{k+1} < r_k$.

Soit un entier $a \geqslant 1$, on appelle $\mathscr{F}_a$ la configuration formée des droites d_1, d_2 et des cercles $\mathscr{C}_k$, $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant a$.

a. Quelle est l'image de $\mathscr{F}_a$ par l'une ou l'autre des homothéties h' et h'' de la question I.A.2.*b.* définies à partir de $\mathscr{C}_0$? En déduire r_{k+1} en fonction de r_k et AO_{k+1} en fonction de AO_k.

Quelle configuration $\overline{\mathscr{F}}$ faudrait-il définir pour que $\overline{\mathscr{F}}$ soit globalement invariante par h' et h'' ?

b. On appelle $\mathscr{A}_k$ la mesure de l'aire du disque délimité par le cercle $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{A}'_k$ la mesure de l'aire du trapèze isocèle circonscrit à $\mathscr{C}_k$ et délimité par les droites d_1 et d_2, la tangente commune à $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ et l'autre tangente à $\mathscr{C}_k$ (si $k \geqslant 1$ c'est l'autre tangente commune à $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k-1}$). Déterminer le rapport $\dfrac{\mathscr{A}_k}{\mathscr{A}'_k}$.

c. On pose $S_n = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1 + \ldots + \mathscr{A}_n$ et $S'_n = \mathscr{A}'_0 + \mathscr{A}'_1 + \ldots + \mathscr{A}'_n$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$, en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Remarque : Le passage par le trapèze n'est pas nécessaire pour étudier la convergence de la suite S_n.

PARTIE II

LES CERCLES DE FORD

1. On considère un cercle $\mathscr{C}(F, p)$ et une droite d tangente à ce cercle. Montrer que l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathscr{C}$ et à d contient une parabole que l'on déterminera.

2. On munit le plan euclidien d'un repère orthonormé. Soit F le point de coordonnées (O, p) et un cercle $\mathscr{C}_0(O_0, r_0)$ de centre O_0 de coordonnées (a_0, b_0) avec $a_0 > 0$, tangent extérieurement au cercle $\mathscr{C}(F, p)$ et à l'axe des abscisses.

a. Montrer qu'il existe un cercle $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ et un seul tel que $\mathscr{C}_1$ soit tangent extérieurement à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_0$, tangent à l'axe des abscisses et que l'abscisse a_1 de son centre O_1 soit positive et inférieure à a_0.

Déterminer a_1 et r_1 en fonction de a_0 et p.

b. On considère alors la suite des cercles $\mathscr{C}_k(O_k, r_k)$, $k \in \mathbb{N}$, tangents extérieurement à $\mathscr{C}$ et à l'axe des abscisses tels que pour tout entier k :

$\mathscr{C}_{k+1}$ est tangent extérieurement à $\mathscr{C}_k$ et $0 < a_{k+1} < a_k$ (où a_k est l'abscisse du centre O_k).

Montrer alors que les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. Déterminer leurs limites.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

CERCLES TANGENTS ENTRE EUX ET TANGENTS À DEUX CERCLES DONNÉS

A. Cercles tangents entre eux et tangents à deux cercles concentriques.

Soit $\mathscr{C}(O, \rho)$ et $\mathscr{C}'(O', \rho')$ deux cercles concentriques avec $\rho < \rho'$.

On considère la suite de cercles $\mathscr{C}_k(M_k, r)$, $k \in \mathbb{N}$, tous tangents à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et tels que :

pour tout entier k, $\mathscr{C}_{k+1}$ est tangent à $\mathscr{C}_k$;

pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathscr{C}_{k+1} \neq \mathscr{C}_{k-1}$.

1. Montrer que les centres M_k appartiennent à une ligne polygonale régulière inscrite dans le cercle $\mathscr{C}''\left(O, \dfrac{\rho + \rho'}{2}\right)$ et que $r = \dfrac{\rho' - \rho}{2}$.

   En déduire que pour tout entier k : $\sin \dfrac{\widehat{M_k O M_{k+1}}}{2} = \dfrac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ où $\lambda = \dfrac{\rho'}{\rho}$.

2. On s'intéresse maintenant au cas où la suite des cercles $\mathscr{C}_k$ se « referme en un tour », c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \geqslant 3$ tel que pour tout $0 < k < n$:

   $\mathscr{C}_k \neq \mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}_0$ et deux cercles $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k'}$ ne sont jamais sécants ($0 \leqslant k < n$; $0 \leqslant k' < n$; $k \neq k'$).

   Montrer qu'il en est ainsi si et seulement si : $\sin \dfrac{\pi}{n} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$.

   En déduire que l'on a alors $\lambda = \left(\dfrac{1}{\cos \dfrac{\pi}{n}} + \tan \dfrac{\pi}{n}\right)^2$.

   Déterminer λ pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$.

B. Quelques éléments sur une transformation : l'inversion.

1. *Puissance d'un point par rapport à un cercle.*

   Soit un cercle $\mathscr{C}(O, r)$ et un point P. On considère une droite d passant par P et coupant le cercle en deux points A et B. On appelle B' le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à B.

   a. Montrer que : $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PB'} = \overline{PA} \times \overline{PB}$.

   b. Montrer que : $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PB'} = PO^2 - r^2$.

   c. En déduire que le produit $\overline{PA} \times \overline{PB}$ est indépendant de la position de la droite d.

   Ce produit est appelé puissance de P par rapport au cercle $\mathscr{C}$. On le note p.

   d. Montrer que si P est extérieur au cercle $\mathscr{C}$ et la droite d tangente en T à $\mathscr{C}$ alors $p = PT^2$.

2. Soit un point Ω du plan et $\mathscr{P}^*$ le plan privé du point Ω. On définit sur $\mathscr{P}^*$ la transformation $\mathscr{T}$ définie par :

$M' = \mathscr{T}(M)$ si et seulement si Ω, M et M' sont alignés et $\overline{\Omega M} \times \overline{\Omega M'} = k$, k constante donnée non nulle.

On dit alors que $\mathscr{T}$ est l'inversion de centre Ω et de puissance k. L'inversion $\mathscr{T}$ est une transformation involutive. ($\mathscr{T} \circ \mathscr{T}$ est l'identité.)

a. On considère deux inversions $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ de même centre Ω et de puissances respectives k_1 et k_2.

Soit $\boldsymbol{h}$ la restriction à $\mathscr{P}^*$ de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{k_2}{k_1}$.
Montrer que $\mathscr{T}_2 \circ \mathscr{T}_1 = \boldsymbol{h}$.

b. En déduire que $\mathscr{T}_2 = \boldsymbol{h} \circ \mathscr{T}_1$.

c. On considère une inversion de centre Ω et de puissance k, on la note $\mathscr{T}(\Omega, k)$.

- Soit $\mathscr{C}(O, r)$ un cercle ne passant pas par Ω et p la puissance de Ω par rapport à ce cercle. Montrer que $\mathscr{C}(O, r)$ est globalement invariant par l'inversion $\mathscr{T}(\Omega, p)$ de centre Ω et de puissance p.

- Soit $\boldsymbol{h}\left(\Omega, \dfrac{k}{p}\right)$ la restriction à $\mathscr{P}^*$ de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{k}{p}$. Montrer que

  l'image de $\mathscr{C}$ par l'inversion $\mathscr{T}(\Omega, k)$ est le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par $\boldsymbol{h}\left(\Omega, \dfrac{k}{p}\right)$.

- Soit O'_1 le centre de $\mathscr{C}'$. Exprimer $\overline{\Omega O'_1}$ en fonction de $\overline{\Omega O}$, k et p. Vérifier que O'_1 n'est pas le transformé de O par $\mathscr{T}(\Omega, k)$.

d. On considère maintenant un cercle $\mathscr{C}$ (O, r) passant par Ω. Soit A le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à Ω et A' l'image de A par $\mathscr{T}$ (Ω, k). On considère la droite Δ passant par A' et perpendiculaire à (ΩA). Soit d une droite quelconque passant par Ω et coupant $\mathscr{C}$ en M et Δ en M'. On considère le cercle de diamètre [A M'], montrer qu'il passe par M et A'.

Calculer de deux façons différentes la puissance de Ω par rapport à ce cercle. En déduire que Δ est l'image de $\mathscr{C}$ privé de Ω.

C. L'alternative de Steiner.

On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ (O_1, r_1) et $\mathscr{C}_2$ (O_2, r_2) tels que $\mathscr{C}_1$ soit intérieur à $\mathscr{C}_2$ avec $O_1 \neq O_2$.

1. *a.* Montrer qu'il existe un point I unique de la droite $(O_1 O_2)$ tel que sa puissance par rapport à $\mathscr{C}_1$ soit égale à sa puissance par rapport à $\mathscr{C}_2$. Montrer que I est extérieur à $\mathscr{C}_2$.

b. Soit T_1 (respectivement T_2) le point de contact de l'une des tangentes issues de I à $\mathscr{C}_1$ (respectivement $\mathscr{C}_2$). Montrer que $IT_1 = IT_2$.

On appelle U et V les points de la droite $(O_1 O_2)$, de milieu I, tels que $IU = IV = IT_1$. On désigne par U celui des deux points qui est intérieur à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On veut montrer que l'inversion $\mathscr{T}$ (V, VU^2) de centre V et de puissance VU^2 transforme les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en deux cercles concentriques de centre U.

(i) Montrer que $\overline{O_jV} \cdot \overline{O_jU} = R_j^2$ $(j \in \{1, 2\})$, en déduire que $\overline{VO_j} \cdot \overline{VU}$ est égal à la puissance de V par rapport à $\mathscr{C}_j$

(ii) Conclure en utilisant le résultat démontré en III.B.2.*c*.

2. On admet que toute inversion conserve les contacts, c'est-à-dire que deux cercles tangents sont transformés en deux cercles tangents par une inversion de centre n'appartenant pas à ces cercles.

On considère alors, de la même manière qu'en III.A., une suite de cercles Γ_k tous tangents à la fois aux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, et tangents entre eux deux à deux.

Déduire de III.A. et III.B. que l'alternative est la suivante : ou bien la suite $(\Gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se « referme » en n coups et en un tour (cf. III.A.2.) et il en sera de même pour toute autre suite de même nature construite à partir d'un cercle quelconque $\Gamma'_0 \neq \Gamma_0$, ou bien elle ne se « referme pas » et aucune autre suite de tels cercles ne pourra se « refermer ».