

# Corrigé E3A MP 2024

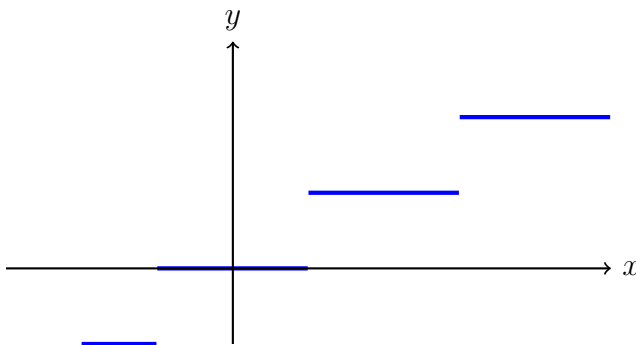
Auteurs : Marie Hézard, François Ezanno

## EXERCICE 1

1. Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , On a l'équivalence :

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k \Leftrightarrow k \leq \frac{x+1}{2} < k+1 \Leftrightarrow x \in [2k-1, 2k+1[.$$

D'où le graphe suivant (on le dessine sur un intervalle un peu plus large que demandé :



2. L'ensemble  $Y(\Omega)$  est l'image directe de  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  par la fonction  $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ . On obtient ainsi  $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

3. On a  $(Y = k) = (2k - 1 \leq X < 2k + 1) = (X = 2k - 1) \cup (X = 2k)$ .

4. La réunion ci-dessus est disjointe, la loi de  $Y$  est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(X = 2k - 1) + \mathbb{P}(X = 2k) \\ &= p(1 - p)^{2k-2} + p(1 - p)^{2k-1} \\ &= p(2 - p)(1 - p)^{2k-2}. \end{aligned}$$

## EXERCICE 2

1. On raisonne par l'absurde. Supposons que  $\cos(n) \rightarrow 0$ , alors  $\cos^2 n \rightarrow 0$  donc  $\cos(2n) \rightarrow -1$ . Or,  $(\cos(2n))$  est une suite extraite de  $(\cos(n))$  donc  $\cos(2n) \rightarrow 0$ . Par unicité de la limite, on aurait alors  $-1 = 0$  ce qui est absurde.

2. On a  $a_n 1^n \rightarrow 0$  donc  $R \geq 1$ .

3. D'après la question préliminaire, elle diverge grossièrement.

4. On a  $\sum \cos(n)1^n$  diverge donc le rayon de convergence  $R'$  de la série entière  $\sum \cos(n)x^n$  est  $\leq 1$ . Or, d'après le cours,  $R = R'$  et ainsi,  $R \leq 1$ .

Finalement,  $R = 1$ .

5.  $\sum e^{in}x^n$  est une série géométrique de raison  $e^i x$ . Ainsi, cette série géométrique converge ssi  $|e^i x| < 1$  c'est-à-dire ssi  $|x| < 1$ .

Finalement, le rayon de convergence est 1.

6. D'après le cours,  $f$  est dérivable et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(n+1))x^n$$

Or, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $x^n \cos(n+1) = \operatorname{Re}(e^{i(n+1)}x^n)$ . Comme  $\sum e^{in}x^n$  converge,  $\sum e^i e^{in}x^n$  est aussi convergente et  $\sum_{n=0}^{+\infty} e^i e^{in}x^n = e^i \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in}x^n = \frac{e^i}{1-xe^i}$ .

On en déduit qu'on a

$$f'(x) = \operatorname{Re} \left( e^i \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in}x^n \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^i}{1-xe^i} \right)$$

Enfin, pour  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $\operatorname{Re} \left( \frac{e^i}{1-xe^i} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^i(1-xe^{-i})}{|1-xe^i|^2} \right)$

Or,  $\operatorname{Re}(e^i - x) = \cos(1) - x$  et  $|1 - xe^i|^2 = (1 - x \cos(1))^2 + x^2 \sin^2(1) = 1 - 2x \cos(1) + x^2$ .

Finalement,

$$\forall x \in ]-1, 1[, f'(x) = \frac{\cos(1) - x}{1 - 2x \cos(1) + x^2}$$

7. On en déduit l'existence de  $K \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos(1) + x^2) + K$ . Notons que  $1 - 2x \cos(1) + x^2 = |1 - xe^i|^2 > 0$  et qu'ainsi,  $f(x) = -\ln|1 - xe^i| + K$ . Comme  $f(0) = 0$ , on a  $K = 0$  et finalement

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos(1) + x^2) = -\ln|1 - xe^i|$$

8. On a  $\frac{\cos^2 \frac{n}{2}}{n} = \frac{1+\cos n}{2n}$ . Le rayon  $\rho$  de la série entière  $\sum \frac{1+\cos n}{2n} x^n$  est égal au rayon de  $\sum (1 + \cos n) x^n$ . Comme  $1 + \cos n$  ne tend pas vers 0, on a  $\rho \leq 1$ , et comme  $(1 + \cos n)$  est bornée on a aussi  $\rho \geq 1$ . Donc  $\rho = 1$ .

Par linéarité de la somme, on a pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$g(x) = \frac{1}{2} \left( f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) = -\frac{1}{2} (\ln|1 - xe^i| + \ln(1-x)).$$

### EXERCICE 3

- Comme  $A$  est réelle,  $B$  est réelle. De plus,  $B = A^T A$  donc  $B^T = A^T (A^T)^T = B$ .  
 $B$  est bien symétrique réelle.
- Comme  $B$  est symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles (d'après le théorème spectral).

De plus, si  $Y \in \mathbb{R}^n$ , on a  $Y^T B Y = Y^T A^T A Y = (AY)^T (AY)$ . Notons  $AY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  : alors

$$(AY)^T (AY) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$$

Ainsi,  $B$  est une matrice symétrique positive. D'après le cours, on a  $\operatorname{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$ .

- Par propriété de la transposition, si  $C$  et  $D$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $(CD)^T = D^T C^T$ . En particulier,  $(A^2)^T = (A^T)^2$  puis  $(A^3)^T = (A^T)^3$ .  
De plus, la transposition est linéaire et  $(A^T)^T = A$  donc finalement,

$$\begin{aligned} A &= (A^T)^T \\ &= (3A^2 - A - I_n)^T \\ &= 3(A^2)^T - A^T - I_n \\ &= 3(A^T)^2 - A^T - I_n \end{aligned}$$

- D'après la relation obtenue dans la question précédente,  $A = 3(3A^2 - A - I_n)^2 - (3A^2 - A - I_n) - I_n$  donc  $(3A^2 - A - I_n)^2 - A^2 = 0$  c'est-à-dire  $P(A) = 0$ .

5. D'après les propriétés de la transposition rappelées dans la question 3, on a  $P(A^T) = P(A)^T$  donc  $P(A^T) = 0$ .

$P$  est annulateur de  $A^T$  mais n'est pas unitaire : son terme dominant est  $9X^4$ .  $\frac{1}{9}P$  est donc un polynôme annulateur unitaire de  $A^T$ .

6. On a  $P = (3X^2 - X - 1 - X)(3X^2 - X - 1 + X)$  soit

$$P = (3X^2 - 2X - 1)(3X^2 - 1)$$

De plus,  $3X^2 - 1 = (\sqrt{3}X - 1)(\sqrt{3}X + 1)$  et  $3X^2 - 2X - 1 = (X - 1)(3X + 1)$ .

Conclusion :

$$P = (X - 1)(3X + 1)(\sqrt{3}X + 1)(\sqrt{3}X - 1)$$

Les polynômes de degré 1 étant irréductibles, ceci est bien une décomposition de  $P$  en produit de polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ .

7. Comme  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$ , le spectre de  $A$  est inclus dans l'ensemble des racines de  $P$ . Ainsi

$$\text{Sp}(A) \subset \left\{ 1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

0 n'est donc pas valeur propre de  $A$  :  $A$  est bien inversible.

8.  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$  qui est simplement scindé :  $A$  est donc diagonalisable et comme dit précédemment,  $\text{Sp}(A) \subset \left\{ 1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ .

9. On a  $AV = \lambda V$ , donc  $A^2V = \lambda^2V$  et comme  $A^T = 3A^2 - A - I_n$ , on a  $A^TV = 3\lambda^2V - \lambda V - V$  c'est-à-dire  $A^TV = (3\lambda^2 - \lambda - 1)V$ .  $V$  est bien un vecteur propre de  $A^T$ .

10.1. On a  $L_1 = \prod_{i=2}^4 \frac{X - \alpha_i}{\alpha_1 - \alpha_i}$  c'est-à-dire

$$L_1 = \frac{9}{8} \left( X + \frac{1}{3} \right) \left( X + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( X - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Les polynômes de degré 1 étant irréductibles, cette écriture est bien une décomposition de  $P$  en produit de polynômes irréductibles.

10.2. C'est une famille de cardinal 4 et  $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ . Ainsi, pour montrer que  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ , il suffit de montrer que  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  est libre.

Soit  $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3 + a_4L_4 = 0$ .

En évaluant en  $\alpha_1$ , on obtient  $a_1 = 0$ . Puis de même,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$  et enfin,  $a_4 = 0$ .

On a bien prouvé la liberté de  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$ .

10.3. Notons  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  ses coordonnées. On a donc  $R = b_1L_1 + b_2L_2 + b_3L_3 + b_4L_4$ .

En évaluant en  $\alpha_1$ , on obtient  $b_1 = P(\alpha_1)$ , puis de même,  $b_2 = P(\alpha_2)$ ,  $b_3 = P(\alpha_3)$  et  $b_4 = P(\alpha_4)$ .

11.1.1. Notons  $Q$  et  $R$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $X^k$  par  $P$ . On a  $X^k = PQ + R$  (\*). Soit  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . Comme  $P(\alpha_i) = 0$ , on a, en évaluant (\*) en  $\alpha_i$  :  $\alpha_i^k = R(\alpha_i)$ .

D'après la question précédente,

$$R = \alpha_1^k L_1 + \alpha_2^k L_2 + \alpha_3^k L_3 + \alpha_4^k L_4$$

11.1.2. En évaluant (\*) en  $A$ , on a, comme  $P(A) = 0$ ,  $A^k = R(A)$  et ainsi

$$A^k = \alpha_1^k L_1(A) + \alpha_2^k L_2(A) + \alpha_3^k L_3(A) + \alpha_4^k L_4(A)$$

11.2. Comme  $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in ]-1, 1[$ , On a, lorsque  $k \rightarrow +\infty$   $\alpha_2^k \rightarrow 0$ ,  $\alpha_3^k \rightarrow 0$  et  $\alpha_4^k \rightarrow 0$ .  
Finalement,  $A^k \rightarrow L_1(A)$ .

Pour montrer que  $L_1(A)$  est la matrice d'une projection, il suffit de montrer qu'on a  $(L_1(A))^2 = L_1(A)$  c'est-à-dire  $L_1^2(A) = L_1(A)$ .

Or, on a  $1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$  d'après la question 10(c) appliquée au polynôme constant égal à 1.

On en déduit que  $L_1 = L_1^2 + L_2L_1 + L_3L_1 + L_4L_1$  (\*\*). De plus,  $P|L_2L_1$ ,  $P|L_3L_1$  et  $P|L_4L_1$  donc ces 3 polynômes sont des polynômes annulateurs de  $A$ . En évaluant (\*\*) en  $A$ , on obtient  $L_1(A) = L_1^2(A)$ .

## EXERCICE 4

1. *Sans précision de l'énoncé, je pars du principe que la fonction  $f$  de l'énoncé est à valeurs réelles.* Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur un segment  $J$ . Alors  $f'$  est continue sur le segment  $J$  donc d'après le théorème des bornes elle est bornée sur  $J$ . Si on pose  $M$  un majorant de  $|f'|$  sur  $J$ , l'inégalité des accroissements finis affirme que

$$\forall x, y \in J, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Autrement dit  $f$  est  $M$ -lipschitzienne.

2. Soit  $f$  une fonction  $k$ -lipschitzienne sur  $J$  et soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ . Alors pour tout  $x, y \in J$  on a :

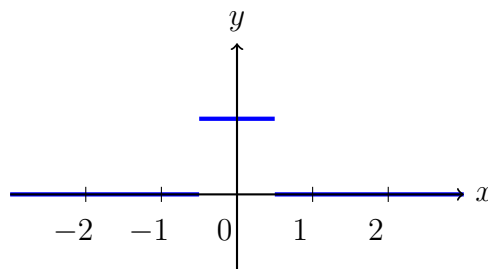
$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\eta = \varepsilon.$$

Ceci montre bien que  $f$  est uniformément continue sur  $J$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :  $\forall t \in \mathbb{R}, |f(x-t)g(t)| \leq \|f\|_\infty |g(t)|$ .  
Or  $g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  donc  $t \mapsto \|f\|_\infty |g(t)|$  l'est aussi.  
Ainsi par comparaison  $t \mapsto |f(x-t)g(t)|$  est bien intégrable, et donc le réel  $(f \star g)(x)$  est bien défini.
4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose le changement de variable affine  $u = x - t$ , qui donne :

$$(f \star g)(x) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)(-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du = (g \star f)(x).$$

- 5.1. Graphe de  $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$



- 5.2.  $f_1$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$  car elle n'est par exemple pas continue en  $1/2$  :

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f_1(x) = 1.$$

- 6.1.  $f_1$  est bornée (avec au passage  $\|f_1\|_\infty = 1$ ) et  $g$  est intégrable donc d'après 3.  $f_1 \star g$  est bien définie.

- 6.2. Remarquons que  $f_1$  est intégrable, d'intégrale 1. En effet elle est positive et dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1.dt = 1 < +\infty.$$

Ainsi pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 |f_1 \star g(x) - f_1 \star g(y)| &= |g \star f_1(x) - g \star f_1(y)| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x-t) - g(y-t))f_1(t)dt \right| \quad (\text{linéarité de } \int) \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t) - g(y-t)| \cdot |f_1(t)|dt \quad (\text{inég. triang.}) \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} k|(x-t) - (y-t)|f_1(t)dt \quad (\text{car } g \text{ est } k\text{-lip.}) \\
 &= k|x-y| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)dt = k|x-y|.
 \end{aligned}$$

*Conclusion.*  $f_1 \star g$  est  $k$ -lipschitzienne donc uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  d'après **2**.

**6.3.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $x-t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow t \in [x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}]$  donc

$$f_1 \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)g(t)dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} \underbrace{f_1(x-t)}_{=1} g(t)dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(t)dt.$$

**6.4.** D'après le théorème fondamental de l'analyse,  $g$  étant continue elle admet une primitive  $G$  qui est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et d'après **6.3.**,

$$f_1 \star g(x) = G(x + \frac{1}{2}) - G(x - \frac{1}{2}).$$

Ainsi  $f_1 \star g$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  par opération sur des fonctions  $C^1$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f_1 \star g)'(x) = g(x + \frac{1}{2}) - g(x - \frac{1}{2}).$$

**7.1.**  $f_1$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . De plus nous avons vu que  $f_1$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et intégrable sur  $\mathbb{R}$  donc  $f_1 \in F$  et  $f_1 \in E$ . Donc  $f_1 \star f_1$  est bien définie d'après **3**.

**7.2.** Commençons par remarquer que la parité de  $f_1$  permet de vérifier que  $f_1 \star f_1$  est paire : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_1 \star f_1(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(-x-t)f_1(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x+t)f_1(-t)dt \stackrel{u=-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)f_1(u)du = f_1 \star f_1(x).$$

Il reste donc à déterminer  $f_1 \star f_1(x)$  pour  $x \geq 0$ .

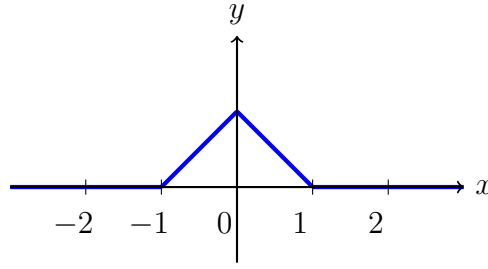
Remarquons que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f_1(x-t)f_1(t) \in \{0, 1\}$ . On a de plus l'équivalence :

$$f_1(x-t)f_1(t) = 1 \Leftrightarrow t \in \left[ x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \right] \cap \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

- Premier cas :  $x > 1$ . Alors  $\left[ x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \right] \cap \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] = \emptyset$  donc  $f_1 \star f_1(x) = 0$ .
- Deuxième cas :  $x \geq 1$ . Alors  $\left[ x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \right] \cap \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] = \left[ x - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$  donc

$$f_1 \star f_1(x) = \int_{x-1/2}^{1/2} 1 \cdot dt = 1 - x.$$

**7.3.** Graphe de la fonction  $f_1 \star f_1$  :



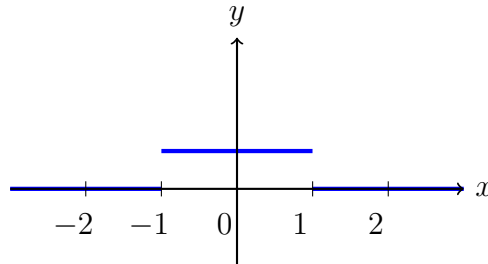
**7.4.**  $f_1 \star f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car

- elle est continue en tout point  $a \notin \{-1, 0, 1\}$ ;

- en  $a = -1, 0$  ou  $1$ , on vérifie aisément que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f_1 \star f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f_1 \star f_1(x) = f_1 \star f_1(a)$ .

**8.1.** La fonction  $h_\alpha$  est égale à  $\frac{1}{\alpha}$  sur  $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ , et égale à 0 ailleurs.

Graphes de  $h_2$  :



**8.2.** On pose le changement de variable  $y = \frac{x}{\alpha}$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) dy = 1.$$

**8.3.** Fixons  $\varepsilon > 0$ . D'après l'hypothèse de continuité on peut choisir  $\eta > 0$  tel que

$$\forall t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta], |g(t) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Vérifions que pour  $\alpha \in ]0, 2\eta]$  on a  $|h_\alpha \star g(x_0) - g(x_0)| \leq \varepsilon$ .

On remarque pour ça que  $\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x_0 - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(u) du = 1$  (avec le changement de variable  $u = x_0 - t$ ). Ainsi  $g(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x_0 - t) g(x_0) dt$ , et donc :

$$\begin{aligned} |h_\alpha \star g(x_0) - g(x_0)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (h_\alpha(x_0 - t)g(t) - h_\alpha(x_0 - t)g(x_0)) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h_\alpha(x_0 - t)| \cdot |g(t) - g(x_0)| dt \quad (\text{inég. triang.}) \\ &= \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} \frac{1}{\alpha} |g(t) - g(x_0)| dt \\ &\leq \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} \frac{\varepsilon}{\alpha} dt \quad (\text{l'intervalle d'intégration est inclus dans } [x_0 - \eta, x_0 + \eta]) \\ &= \alpha \times \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon. \end{aligned}$$

*Conclusion.* On a donc bien  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h_\alpha \star g(x_0) = g(x_0)$ .

**9.1.** Soit  $h \in E$  (rappelons que  $g \in F$ ). On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$|h \star g(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)g(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t)| \cdot |g(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|h\|_\infty \cdot |g(t)| dt = \|h\|_\infty \|g\|_1.$$

Ceci entraîne que  $\|h \star g\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|g\|_1$ .

**9.2.**  $\Phi$  est linéaire et nous venons de voir que

$$\forall h \in E, \quad \|\Phi(h)\|_\infty \leq k \|h\|_\infty, \quad \text{où } k := \|g\|_1.$$

Donc par caractérisation des applications linéaires continues,  $\Phi$  est bien continue (et même  $k$ -lipschitzienne).

**9.3.** Le "en déduire" dans l'énoncé fait référence plutôt à la question 9.1. qu'à la 9.2.

Puisque pour  $h \in E \setminus \{0_E\}$  nous avons  $\frac{\|\Phi(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq \|h\|_1$ , on a immédiatement :

$$\|\Phi\| = \sup_{h \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|\Phi(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq \|h\|_1.$$

**10.** Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} |f \star g(y) - f \star g(x)| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y-t) - f(x-t)| \cdot |g(t)| dt \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y-t) - f(x-t)| dt \\ &= \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t - (y-x))| dt \quad (\text{chgt de variable } t \mapsto y-t) \\ &= \|g\|_\infty \delta(y-x), \end{aligned}$$

$$\text{où } \delta(h) := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t-h)| dt = \int_{-A-h}^{A+h} |f(t) - f(t-h)| dt.$$

Il suffit donc<sup>1</sup>, pour obtenir l'uniforme continuité de  $f \star g$ , de vérifier que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0.$$

Notons  $x_1, \dots, x_N$  les éventuels points de discontinuité de  $f$ . On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée (dans sa version "paramètre continu") quand  $h \rightarrow 0^+$ , en commençant par remarquer que pour  $h \in ]0, 1]$ ,

$$\delta(h) = \int_{-A}^{A+1} |f(t) - f(t-h)| dt.$$

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , On a  $\lim_{h \rightarrow 0^+} |f(t) - f(t-h)| = \ell(t)$ , où  $\ell$  est une fonction nulle sauf éventuellement en les points  $x_i$  (et  $\ell(x_i) = |f(x_i) - f(x_i^-)|$ ).
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , on a  $|f(t) - f(t-h)| \leq 2\|f\|_\infty$ , or la fonction constante  $t \mapsto 2\|f\|_\infty$  est intégrable sur  $[-A, A+1]$ .

Par conséquent on a  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \delta(h) = 0$ , et on montre de même que  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \delta(h) = 0$ . D'où la conclusion souhaitée.

---

1. en effet dans ce cas, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on peut prendre  $\eta > 0$  tel que  $|h| \leq \eta \Rightarrow \delta(h) < \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}$ . On aura alors pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $|y-x| \leq \eta$ ,  $|f \star g(y) - f \star g(x)| \leq \varepsilon$ .