

Partie I

I.A.

I.A1. La propriété, évidente, est vraie dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et la réciproque n'est vraie que dans $\mathfrak{M}_1(\mathbb{K})$ puisque la matrice nulle et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique donc même trace.

I.A2. Via l'identification « non canonique » : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a, b, c, d)$, on reconnaît le produit scalaire euclidien « canonique » sur \mathbb{R}^4 .

I.A3. Toujours avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

- nous devons prouver que $2(ad - bc) \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ qui suffit puisque la permutation $\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$ laisse le second membre invariant tandis qu'elle oppose le premier. L'inégalité à prouver est donc $0 \leq a^2 + d^2 - 2ad + b^2 + c^2 + 2bc$ (i.e.) $(a - d)^2 + (b + c)^2 \geq 0$ qui est claire et résout
- le cas d'égalité : $\begin{cases} a = d \text{ et } b = -c \\ \text{ou } (\sigma = (ab)(cd)) \\ b = c \text{ et } a = -d \end{cases}$

Bilan :

- $|\text{Det } M| \leq \frac{1}{2} \text{Tr } {}^tMM$.
- $|\text{Det } M| = \frac{1}{2} \text{Tr } {}^tMM$ pour les seules matrices de la réunion de plans vectoriels

$$\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

I.A4. $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} = (a - X)(d - X) - bc = X^2 - \text{Tr}(M)X + \text{Det}(M)$. Donc

$$\chi_M(1) = 0 \iff 1 - \text{Tr}(M) + \text{Det}(M) = 0.$$

I.B.

I.B1.

$$(1) \quad MP(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta & -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \cos \theta + d \sin \theta & -c \sin \theta + d \cos \theta \end{pmatrix}$$

assure

$$(2) \quad \psi(\theta) = (a + d) \cos \theta + (b - c) \sin \theta.$$

- Montrons que φ est bornée :
 $|\varphi(\theta)| = |(a + d) \cos \theta + (b - c) \sin \theta| \leq |a + d| + |b - c|$ assure que φ est bien bornée sur \mathbb{R} .
- Montrons que φ atteint un maximum sur \mathbb{R} :
Par **périodicité** : $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi([0, 2\pi])$ est l'image d'un **intervalle fermé borné**, elle reste un **intervalle fermé borné**, donc $\varphi(\mathbb{R}) = [\varphi(\theta_0), \varphi(\theta_1)]$ et $\max \varphi(\mathbb{R}) = \varphi(\theta_1)$
- La dernière relation a lieu pour un $\theta_1 \in]0, 4\pi[\subset \mathbb{R}$ lequel est **ouvert**. Comme φ est **dérivable** sur cet (intervalle) ouvert, on a $\varphi'(\theta_1) = 0$. Suivant l'indication, déduisons-en que

- $MP(\theta_1)$ est symétrique. La formule (1) montre qu'il s'agit de montrer que $(c-b)\cos\theta_1 + (d+a)\sin\theta_1 = 0$, la formule (2) assure que $\varphi'(\theta) = -(a+d)\sin\theta + (b-c)\cos\theta$ ainsi $\varphi'(\theta_1) = 0$ exprime la symétrie de $MP(\theta_1)$ et

$$\boxed{MP(\theta_1) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})}$$

Remarque : Voici l'explication de ce « miracle » :

- En diagonalisant $A \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{A}_2(\mathbb{R})$ à l'aide d'une matrice de $GL_2(\mathbb{C})$, on constate aisément que $\forall x \in \mathbb{R} \ e^{xA} = P(xa)$
- On constate ensuite que la fonction $f \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \text{Tr}(MP(\theta_1)e^{xA}) \end{cases}$ vérifie $f(x) = \text{Tr}(MP(\theta_1 + xa)) = \varphi(\theta_1 + xa)$, qu'elle est donc maximale en 0 (φ l'étant en θ_1)
- Or $\frac{d}{dx} [MP(\theta_1)e^{xA}] = MP(\theta_1)Ae^{xA}$, on a donc $f'(0) = 0 = \text{Tr}(MP(\theta_1)A)$ ce qui prouve que $\forall A \in \mathbf{A}_2(\mathbb{R}) \ {}^t(MP(\theta_1)) \perp A$, c'est bien dire que

$$\boxed{{}^t(MP(\theta_1)) \in \mathbf{A}_2(\mathbb{R})^\perp = \mathbf{S}_2(\mathbb{R}).}$$

- On observe qu'une généralisation à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ passe par l'observation du fait que l'exponentielle envoie le sous-espace des matrices antisymétriques : $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ dans le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales. C'est une conséquence facile du fait que les matrices antisymétriques sont orthogonalement semblables à des matrices diagonales par blocs antisymétriques de $\mathbf{A}_2(\mathbb{R})$ plus un bloc nul ($\in \mathbf{A}_1(\mathbb{R})$!) dans le cas où n est impair.

I.B2. Comme $MP(\theta_1) \in \mathbf{S}_2(\mathbb{R})$, on sait pouvoir le diagonaliser via $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ autrement dit, $\mathbf{D}_2(\mathbb{R})$, désignant le plan des matrices diagonales réelles :

$$\exists (Q, D) \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathbf{D}_2(\mathbb{R}) ; {}^tQMP(\theta_1)Q = D.$$

(échanger les colonnes d'une $Q \in O_2^-(\mathbb{R})$ qui se serait indécemment présentée, permute les éléments de la diagonale de D , la laissant dans $\mathbf{D}_2(\mathbb{R})$). Ce qui permet d'écrire :

$$(3) \ M = QD{}^tQP(-t_1) \stackrel{\text{« déf »}}{=} P(\theta_1)DP(-t_1 - \theta_1)$$

et $\boxed{t_2 = -t_1 - \theta_1}$ convient. En prenant pour M , la matrice nulle, on constate que la décomposition « UDV » ne saurait être unique, ce qui explique les guillemets surmontant l'égalité (3).

I.B3. M_0 conduit à $\varphi_0(\theta) = \cos(\theta) - \sin(\theta)$. Comme $\varphi_0'(\theta) = -\sin(\theta) - \cos(\theta)$, on obtient

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ qui indique que } \mathbf{S}_2(\mathbb{R}) \ni MP(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} S$$

dont le spectre est évident. En effet $\text{rg}(S) = 1$ et $\text{Tr}(S) = \sqrt{2}$ assurent que $\text{Sp}(S) = \{0, \sqrt{2}\}$ et on obtient, par le calcul classique les « vecteurs-colonnes propres » de $Q \stackrel{\text{encore!}}{=} P\left(-\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.

On en déduit, conformément au (IB2), $M \stackrel{UDV}{=} P\left(-\frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ce que le calcul confirme puisque

$$P\left(-\frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{en effet}}{=} M$$

Ainsi : $\boxed{(t_1, t_2) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)}$ convient.

I.C. Sans phrase :

$$\boxed{{}^tBB = {}^tV{}^tA{}^tUUA{}^tV \stackrel{U \in O_2(\mathbb{R})}{=} {}^tV{}^tAA{}^tV \stackrel{V \in O_2(\mathbb{R})}{=} V^{-1}({}^tAA)V \simeq {}^tAA.}$$

Partie II

II.A. $M \in \mathcal{R} \iff 1 \in \{k \in \mathbb{R} ; \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \ ||M\xi|| \leq k||\xi||\} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \widehat{M}$ La borne inf\u00e9rieure de \widehat{M} est la valeur en M de la **norme subordonn\u00e9e** \u00e0 $\|\cdot\|$, habituellement not\u00e9e $|||M|||$. Donc $M \in \mathcal{R} \iff 1 \geq |||M|||$ ce qui fait que :

$\mathcal{R} = B_{|||\cdot|||}(\vec{O}, 1)$ est la boule unit\u00e9 ferm\u00e9e centr\u00e9e en la matrice nulle de l'espace vectoriel norm\u00e9 : $(\mathbf{E}, |||\cdot|||)$

II.B.

II.B1.

- En prenant successivement pour ξ les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient $\|M\xi\| = a^2 + c^2$ puis $b^2 + c^2$ et, si $M \in \mathcal{R}$, $a^2 + c^2 \leq 1$ et $b^2 + c^2 \leq 1$ conclut
- \mathcal{R} est ferm\u00e9 et born\u00e9 dans \mathbf{E} lequel est un espace vectoriel norm\u00e9 de dimension 4 sur \mathbb{R} .

\mathcal{R} est donc bien compact.

II.B2.

$$|||(tM_1 + (1-t)M_2)\xi||| = |||tM_1\xi + (1-t)M_2\xi||| \stackrel{\text{IT}}{\leq} t|||M_1\xi||| + (1-t)|||M_2\xi||| \stackrel{M_1, M_2 \in \mathcal{R}}{\leq} t|||\xi||| + (1-t)|||\xi||| = |||\xi|||$$

Remarque : ce calcul montre que la boule unit\u00e9 de centre la matrice nulle, relative \u00e0 une norme subordonn\u00e9e est convexe. Mais le **calcul** :

$$|||tM_1 + (1-t)M_2||| \stackrel{\text{IT}}{\leq} t|||M_1||| + (1-t)|||M_2||| \stackrel{M_1, M_2 \in \mathcal{R}}{\leq} t + (1-t) = 1$$

prouve que **La boule unit\u00e9 (et les autres) de tout evn est convexe...**

II.C.

II.C1. $(\forall \xi \in \mathbb{R}^2) (\forall M \in \mathbf{E}) \quad {}^t \xi^t M M \xi = {}^t (M \xi) (M \xi) = \|M \xi\|^2$ donc

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}^2) (\forall M \in \mathbf{E}) \quad {}^t \xi^t M M \xi \leq {}^t \xi \xi \iff \|M \xi\|^2 \leq \|\xi\|^2 \iff \|M \xi\| \leq \|\xi\| \iff M \in \mathcal{R}$$

II.C2.

II.C2a.

- $S \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} {}^t M M \in \mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable, semblable (orthogonalement) \u00e0 une matrice \u00e0 diagonale r\u00e9elle. Ainsi χ_S est \u00e0 racines r\u00e9elles et

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 ; \chi_{{}^t M M} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$

- Si $\lambda \in \text{Sp}(S)$ et si ξ est un vecteur propre colonne associ\u00e9 : ${}^t \xi^t M M \xi = \begin{cases} \|M \xi\|^2 \\ {}^t \xi (\lambda \xi) = \lambda \|\xi\|^2 \end{cases}$

et, comme $\xi \neq 0$, $0 \leq \frac{\|M \xi\|^2}{\|\xi\|^2} \stackrel{M \in \mathcal{R}}{\leq} 1$ cela montre que : $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et que

II.C2b.

- $M \in \mathcal{R} \implies \text{Sp}({}^t M M) \subset [0, 1]$
- Montrons enfin que $\text{Sp}({}^t M M) \subset [0, 1] \implies M \in \mathcal{R}$. Pour cela, on va utiliser (IIC1) qui assure que ce qu'il suffit d'obtenir est $\forall \xi \in \mathbb{R}^2 \quad {}^t \xi^t M M \xi \leq {}^t \xi \xi (= \|\xi\|^2)$. ${}^t M M \in \mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ assure clairement que tout $\xi \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2$ o\u00f9 ξ_1 et ξ_2 sont des

vecteurs propres *orthogonaux* de tMM . Si $\mathbb{R} \ni \lambda_i$ est valeur propre associée à ξ_i . Il vient :

$$\begin{aligned} {}^t\xi^tMM\xi &= (x_1{}^t\xi_1 + x_2{}^t\xi_2){}^tMM(x_1\xi_1 + x_2\xi_2) = (x_1{}^t\xi_1 + x_2{}^t\xi_2)(x_1\lambda_1\xi_1 + x_2\lambda_2\xi_2) = \\ \lambda_1x_1^2\|\xi_1\|^2 + \lambda_2x_2^2\|\xi_2\|^2 &\leq \max(\lambda_1, \lambda_2)(x_1^2\|\xi_1\|^2 + x_2^2\|\xi_2\|^2) \stackrel{\text{Sp}({}^tMM) \subset [0,1]}{\leq} \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2 \stackrel{\text{Pythagore}}{=} \|\xi\|^2 \end{aligned}$$

II.D. Selon **II.C2a** nous devons démontrer l'équivalence :

$$\text{Sp}({}^tMM) \subset [0, 1] \iff \begin{cases} \text{Tr}({}^tMM) \leq 1 + (\text{Det}(M))^2 \\ \text{Tr}({}^tMM) \leq 2 \end{cases}$$

Écrivons encore $\chi_{{}^tMM} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, observant que $\text{Det}({}^tMM) = (\text{Det}(M))^2$, et nous souvenant du fait, argumenté au second point du (IIC2), que $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, il nous suffit de prouver que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left[(x, y) \in] - \infty, 1] \iff \begin{cases} x + y \leq 1 + xy \\ x + y \leq 2 \end{cases} \right]$$

- Pour \implies , on observe que $xy - x - y + 1 = (1 - x)(1 - y)$ qui conclut puisque $x + y \leq 2$ est trivial.
- Pour \impliedby , $(1 - x)(1 - y) \geq 0$ et $x + y \leq 2$ sont des hypothèses sur $(x', y') \stackrel{\text{déf}}{=} (1 - x, 1 - y)$ qui s'écrivent : $\begin{cases} x'y' \geq 0 \\ x' + y' \geq 0 \end{cases}$ lesquelles assurent facilement (« deux nombres de même signe large ont celui de leur somme ! ») $x' \geq 0$ et $y' \geq 0$ qui était notre but.

II.E. Remarquons que \mathcal{R} étant compact, \mathcal{S} , qui est évidemment inclus dans la sphère unité de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, lui est égal.

II.E1. Comme on l'a déjà observé deux fois, les valeurs propres de tMM sont positives. L'équivalence à démontrer s'écrit donc : $1 = \max[\text{Sp}({}^tMM)] \iff M \in \mathcal{S}$

- Pour \implies , $\text{Sp}({}^tMM) \subset [0, 1]$ assure, selon (IIC2), que $M \in \mathcal{R}$ et $1 \in \text{Sp}({}^tMM)$ que $\exists \xi_0 \neq 0$; ${}^tMM\xi_0 = \xi_0$. Multipliant cette relation à gauche par ${}^t\xi_0$, on obtient $M \in \mathcal{S}$.
- Pour \impliedby , si $\xi_0 \neq 0$ réalise l'égalité $\|M\xi_0\| = \|\xi_0\|$, les inégalités de (IIC2) deviennent des égalités qui, puisque $\|\xi_0\| \neq 0$, assurent : $\max(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ qui nous suffit.

II.E2.

II.E2a. ${}^tMM \stackrel{IB2}{=} {}^tP(t_2)D^tP(t_1)P(t_1)DP(t_2) = P(t_2)^{-1}D^2P(t_2) \simeq D^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{« Les » valeurs propres de } {}^tMM \text{ sont donc } \alpha^2 \text{ et } \beta^2.}$$

II.E2b. On va utiliser (IIE1) qui assure que $M \in \mathcal{S} \iff 1 = \max[\text{Sp}({}^tMM)]$ et donc démontrer que

$$1 = \max[\text{Sp}({}^tMM)] \iff \exists (U, V, \gamma) \in O_2(\mathbb{R})^2 \times [-1, 1]; M = U \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V.$$

- L'implication \impliedby est claire puisque, selon (IIE2i), les valeurs propres de tMM sont 1 « et » $\gamma^2 \in [0, 1]$, $1 = \max[\text{Sp}({}^tMM)]$ est alors acquis.
- On a supposé en outre que $M = UDV$, avec $\beta \geq \alpha$ et $\beta \geq 0$: cela garantit que $\beta^2 \geq \alpha^2$. Donc, l'hypothèse $1 = \max[\text{Sp}({}^tMM)]$ implique que $\beta^2 = 1$ et que $\alpha^2 \leq 1$. Ainsi $\alpha \in [-1, 1]$ et $\beta = +1$ puisque β est positif.

II.E3. Il suffit bien sûr de le démontrer pour $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puisque, si $\Gamma = tW + (1-t)W'$ avec $(W, W') \in SO_2(\mathbb{R})^2$, on obtient :

$M = U\Gamma V = tUWV + (1-t)UW'V$ et $(UWV, UW'V) \in O_2(\mathbb{R})^2$ convient.

Écrivant $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1+\gamma}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1-\gamma}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on constate que

$$\boxed{(t, W, W') = \left(\frac{1+\gamma}{2}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ convient.}}$$

II.F.

II.F1.

- Si $M \in \mathbf{E}$, le système $\mathfrak{S}_M : M = M_1 + M_2$ aux inconnues $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ s'écrit, avec des notations évidentes : $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & d-b \\ d+b & a-c \end{pmatrix}$ dont la résolution dépend

de la matrice : $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\text{Det}(\widetilde{M}) = -2 \neq 0$.

Cela montre que $\forall M \in \mathbf{E}$, \mathfrak{S}_M admet une solution unique ; c'est bien dire que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$.

- On effectue, avec les mêmes notations évidentes que plus haut :

$$\langle M_1, M_2 \rangle = ac - bd + db - ca = 0 \text{ qui prouve que } \mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{E}_2.}$$

II.F2. $\forall M_1 \in \mathbf{E}_1$, $\text{Det}(M_1) = a^2 + b^2 \geq 0$ conclut. De même : $O_2^- \subset \mathbf{E}_2$.

II.F3. Examinons les situations possibles pour le couple $(\text{Det}(W), \text{Det}(W'))$ lorsque $\mathcal{S} \ni M = tW + (1-t)W'$:

- Si W et $W' \in SO_2(\mathbb{R}) \subset \mathbf{E}_1$, on aurait (notations évidentes)

$${}^tMM = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)\mathbf{I}_2 \in \mathcal{S}$$

qui n'admet 1 comme valeur propre que si $(a^2 + b^2)\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2 = {}^tMM$ (i.e.) que si $M \in O_2(\mathbb{R})$.

- De même, si W et $W' \in O_2^- \subset \mathbf{E}_2$, ${}^tMM = (c^2 + d^2)\mathbf{I}_2 \in \mathcal{S}$ impose $M \in O_2(\mathbb{R})$.

On en déduit que, si $M \notin O_2(\mathbb{R})$, se trouve sur un segment d'extrémités : W et W' orthogonales, ces extrémités sont nécessairement de déterminants opposés, autrement dit

$$(W, W') \in (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \cup (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1).$$

Cela impose le fait que « $M = tW + (1-t)W'$ » *est l'unique décomposition* suivant $\mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$.

Une matrice non orthogonale de la sphère unité \mathcal{S} ne se trouve que sur un seul segment d'extrémités « orthogonales ». On remarque qu'au contraire, une matrice orthogonale se trouve sur une infinité de segments d'extrémités orthogonales : ils sont portés par les droites formant tout le cône dont elle est le sommet et qui s'appuie sur $O_2(\mathbb{R})$.

Partie III

III.A.

III.A1.

$$M \in \mathcal{S} \xrightarrow{IE1} \chi_{tMM}(1) = 0 \xleftrightarrow{IA4} \text{Tr}({}^tMM) = 1 + (\text{Det}(M))^2 \iff \|M\|^2 = 1 + (\text{Det}(M))^2.$$

Bien sûr, sans équivalence puisque (IID) montre que si $\text{Det}(M) > 1$, $\|M\|^2 > 2$ interdit même $M \in \mathcal{R}$. Concrètement :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathcal{H} \setminus \mathcal{R}) \subset (\mathcal{H} \setminus \mathcal{S}) \neq \emptyset$$

puisque $2^2 + 1^2 = 1 + (2 \cdot 1)^2$ et $\text{Det}(M) = 2 > 1$. et $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{H}$

III.A2.

III.A2a. On sait que $M \in \mathcal{S} \xleftrightarrow{IIE1} 1 = \max[\text{Sp}({}^tMM)]$. Or $1 \in \text{Sp}({}^tMM)$ signifie, selon (A4), $\|M\|^2 = 1 + (\text{Det}(M))^2$ c'est-à-dire précisément $M \in \mathcal{H}$. Pour obtenir $M \in \mathcal{S}$, il suffit maintenant d'exprimer le fait que l'« autre » valeur propre de tMM , savoir λ , reste dans $[0, 1]$ mais $\text{Tr}({}^tMM) = \begin{cases} 1 + \lambda : (\text{diagonalisation de } {}^tMM) \\ 1 + (\text{Det}(M))^2 : M \in \mathcal{H} \end{cases}$ Ainsi :

$\text{Det}(M) \in [-1, 1]$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $M \in \mathcal{H}$ soit dans \mathcal{S} . Condition, bien entendu, violée par le contre-exemple ci-dessus.

III.A2b. Dans \mathcal{H} , $\|M\|^2 = 1 + (\text{Det}(M))^2$, la condition qui équivaut à l'appartenance à \mathcal{S} obtenue ci-dessus : $(\text{Det}(M))^2 \leq 1$ s'écrit donc aussi $\|M\|^2 \leq 2$ et on obtient la condition plus géométrique :

Les matrices de \mathcal{H} qui sont dans \mathcal{S} sont celles de la boule de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ c'est-à-dire que $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap B_{\|\cdot\|}(O, \sqrt{2})$

III.B.

III.B1. Illico, avec notations évidentes :

$$\text{Det}(M_1 + M_2) = \begin{vmatrix} a+c & d-b \\ b+d & a-c \end{vmatrix} = a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = \text{Det}(M_1) + \text{Det}(M_2).$$

III.B2.

- Considérons, pour $t \in \mathbb{R}$, une matrice $(WW') \ni M = tW + (1-t)W'$. Comme $(tW, (1-t)W') \stackrel{IIF2}{\in} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$, $\text{Det}(M) \stackrel{IIB1}{=} \text{Det}(tW) + \text{Det}((1-t)W') = t^2 - (1-t)^2 = 2t - 1$.

Or $\|M\|^2 \stackrel{tW \perp (1-t)W'}{=} t^2\|W\|^2 + (1-t)^2\|W'\|^2 \stackrel{\|W\|^2 = \|W'\|^2 = 2}{=} 2(t^2 + (1-t)^2) = 4t^2 - 4t + 2$.

Comparons avec $1 + (\text{Det}(M))^2 = 1 + (2t-1)^2 = 4t^2 - 4t + 2$. C'est pareil et $(WW') \subset \mathcal{H}$ est démontré.

- Montrons que \mathcal{H} est « réglée » par des droites passant par deux matrices orthogonales Si $M \in \mathcal{H}$, on cherche $(W_M, W'_M) \in SO_2(\mathbb{R}) \times O_2^-$; $M \in (W_M W'_M)$. Si $M \notin \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$, on peut écrire $M \stackrel{IIF1}{=} M_1 + M_2 \stackrel{\text{« déf »}}{=} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$ et $c^2 + d^2 \neq 0$.

On pose alors $W_M = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ et $W'_M = \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \in O_2^-(\mathbb{R})$ ainsi

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} W_M + \sqrt{c^2 + d^2} W'_M \in (W_M W'_M).$$

Restent les cas particuliers : $M \in \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$.

On constate que $\mathbf{E}_1 \cap \mathcal{H} = SO_2(\mathbb{R})$ et $\mathbf{E}_2 \cap \mathcal{H} = O_2^-(\mathbb{R})$ ($a^2 + b^2 = 1, -c^2 - d^2 = -1$) ce qui résout la question puisque *toute* droite reliant M à une matrice orthogonale de déterminant opposé, restant (selon le résultat précédent) dans \mathcal{H} , convient.

Partie IV

IV.A. On a vu, dans la démonstration de (IIIA2), que $M \in \mathcal{H} \iff 1 \in \text{Sp}({}^tMM)$, comme $\forall t \in \mathbb{R} \quad {}^t(tM)(tM) = t^2({}^tMM)$, si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, « les » valeurs propres de ${}^t(tM)(tM)$ sont (Calculer, pour $\mu \in \mathbb{R}^*$, $\chi_{\mu A}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$) $t^2\lambda_1$ et $t^2\lambda_2$ on y trouve 1 si $t = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$. Évidemment $O \notin \mathcal{H}$, comme $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$, en détaillant le cas $\lambda_1\lambda_2 = 0$, on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \text{ donne deux valeurs de } t : \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}, i \in \{1, 2\} \\ 0 < \lambda_1 = \lambda_2 \text{ donne une valeur de } t : \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \\ 0 = \lambda_1 < \lambda_2 \text{ donne une valeur de } t : \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \\ 0 = \lambda_1 = \lambda_2 \text{ donne 0 valeur de } t : {}^tMM = 0 \implies M = 0 = tM \notin \mathcal{H} \end{array} \right.$$

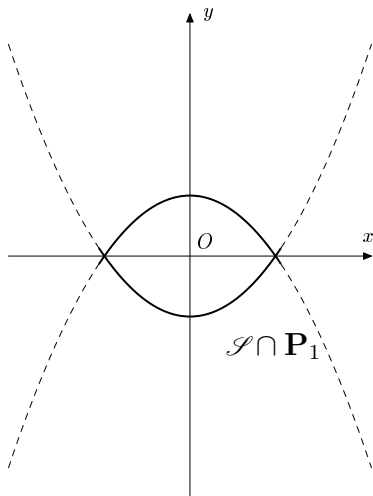
IV.B.

IV.B1. $\mathcal{M}_1(x, y) \in O_2(\mathbb{R})$ ssi $\frac{x^2}{2} = 1, xy = 0, y^2 + \frac{x^2}{2} = 1$ ce qui équivaut à $y = 0$ et $x = \pm\sqrt{2}$.

Dans le plan \mathbf{P}_1 , on ne trouve de matrices orthogonales que \mathbf{I}_2 et $-\mathbf{I}_2$

IV.B2.

IV.B2a. $\mathcal{M}_1(x, y) \in \mathcal{H} \iff x^2 + y^2 = 1 + \frac{x^4}{4}$ or $x^4 + 4 - 4x^2 - 4y^2 = (x^2 - 2)^2 - (2y^2)^2 = (x^2 - 2y - 2)(x^2 + 2y - 2)$ On peut donc appeler \mathcal{C}_1 la conique d'équation $x^2 - 2y - 2 = 0$ et \mathcal{C}_2 celle d'équation $x^2 + 2y - 2 = 0$, ce sont deux paraboles symétriques par rapport à (Ox) : $y = \pm \frac{x^2 - 2}{2}$.



Remarque : on constate que, si $m = (x, y) \neq (0, 0)$, le nombre d'intersections de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \sim \mathcal{H} \cap \mathbf{P}_1$ avec la demi-droite $[Om)$ est bien 2 en général ou 1, dans le cas exceptionnel où

$m = (\pm\sqrt{2}, 0)$.

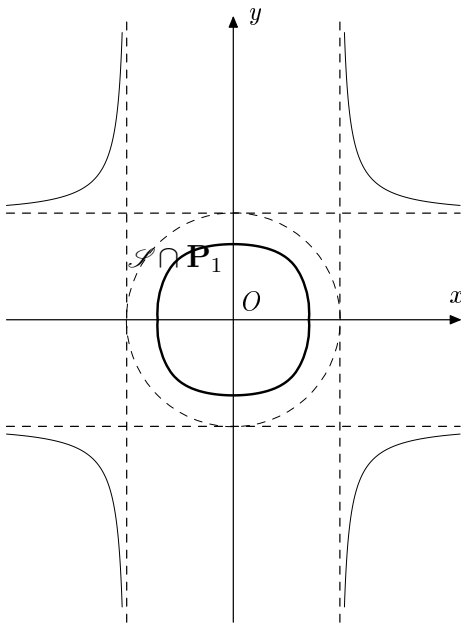
IV.B2b. Si $\mathcal{M}_1(x, y) \in \mathcal{H}$, le (IIIA2) assure que

$$\mathcal{M}_1(x, y) \in \mathcal{S} \iff \text{Det}(\mathcal{M}_1(x, y)) \in [-1, 1] \iff \frac{x^2}{2} \in [-1, 1] \iff x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$\mathcal{S} \cap \mathbf{P}_1$ n'est donc que la partie compacte de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ qu'en constituent les points dont l'abscisse reste dans $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

IV.C. $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_2$ est clairement symétrique par rapport aux axes et à O . L'équation, dont le calcul pénible nous est épargné, se résout en : $y = \pm\sqrt{\frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 2}}$. On se contente donc de l'étude du

graphe de $f : \begin{cases} [0, 1] \cup]\sqrt{2}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow \sqrt{\frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 2}} \end{cases}$ laquelle est immédiate : $f'(x) \leq 0$, et les symétries conduisent à la figure ci contre.



La partie $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}_2$ est celle que (IIIA2ii) détermine, en exigeant d'un point $\mathcal{M}_2(x, y)$ de $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_2$, qu'il vérifie $\|M\|^2 \leq 2$, c'est le disque de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ du plan $\mathbf{P}_2 \sim \mathbb{R}^2$. $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}_2$ est donc l'« ovale » : composante compacte de la « quartique elliptique » : $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_2$ qui constitue un arc fermé.

Remarque géométrique : Si \mathbf{P} est un plan quelconque de \mathbf{E} , voici comment le (IVA) permet de déterminer $\mathfrak{S} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{S} \cap \mathbf{P}$ à partir de $\mathfrak{H} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{H} \cap \mathbf{P}$ sans passer par l'argument (IIIA1) (Dans le B, \mathfrak{H} est une réunion de paraboles et dans le C, d'un ovale et de 4 branches de pseudo-hyperboles.) Observons que **toute** demi-droite d'origine O rencontre $\mathfrak{H} \stackrel{\text{rappel}}{=} \{M \in \mathbf{E}; \|M\|^2 = 1 + \text{Det}(M)^2\}$. En effet, si $0 \neq N \in \mathbf{E}$, l'équation $\|tM\|^2 = 1 + \text{Det}(tN)^2$, qui admet la racine évidente 1, si $N \notin GL_2(\mathbb{R})$ s'écrit : $u = t^2$ et $u^2 \text{Det}(N)^2 - u\|N\|^2 + 1 = 0$ dont le **discriminant** : $\|N\|^4 - 4\text{Det}(N)^2$ a le signe de $\|N\|^2 - 2|\text{Det}(N)| \stackrel{IA3}{\geq} 0$ et qui admet une racine **positive** (et même 2) puisqu'elles sont de même signe et que leur somme est positive. Une demi-droite d'origine O passant par un point $M \in \mathfrak{S}$ rencontre en général 2 fois \mathfrak{H} . Une fois seulement si χ_{tMM} admet une racine double ou 0 comme racine : c'est-à-dire si $[M \in O_2(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{S}]$ ou si $[M \notin GL_2(\mathbb{R})]$. Examinons ces 3 cas :

- Le cas « général » : $\text{Sp}({}^tMM) = \{\lambda, 1\}$ avec $\lambda < 1$ et les deux matrices de $[OM] \cap \mathcal{H}$ sont M et $\frac{1}{\lambda}M$. Mais ${}^t\left(\frac{1}{\lambda}M\right)\left(\frac{1}{\lambda}M\right) = \frac{1}{\lambda^2}{}^tMM$ a comme spectre $\left\{\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}\right\} \subset]0, 1[$. Ainsi, sur

$[OM)$, seule $M \in \mathfrak{S}$. Voici comment repérer géométriquement M : elle est plus proche de O que $\frac{1}{\lambda}M$ dans l'evn $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, donc dans $(\mathbf{P}, \|\cdot\|)$ en notant encore $\|\cdot\|$ la norme qu'elle induit sur \mathbf{P} . Observons enfin que les identifications proposées : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{P}_i \\ (x, y) \longrightarrow \mathcal{M}_i(x, y) \end{cases}$, adoptant les bases $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{I}_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ qui sont **orthonormales** pour $\|\cdot\|$, sont des **isométries** du plan vectoriel euclidien canonique \mathbb{R}^2 sur les plans normés $(\mathbf{P}_i, \|\cdot\|)$ puisque $2\frac{x^2}{2} + y^2 = x^2 + y^2$.

- $M \in O_2(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{S}$ est le seul point de \mathcal{H} qu'on trouve sur $[OM)$.
- $\text{Sp}({}^tMM) = \{0, 1\}$, on sait encore que M est le seul point de \mathcal{H} qu'on trouve sur $[OM)$. Il n'est pas facile, dans le cadre des programmes actuels, de différentier géométriquement ce cas du précédent. En fait les deux exemples rencontrés font penser à la solution Le cas précédent est celui où la singularité du point M vient du fait que c'est un point double de \mathcal{H} , le cas présent est celui où le point M est le seul de $[OM)$ sur \mathcal{H} car l'« autre » est **double et à l'infini!**

Voici la conclusion géométrique de ces remarques. Comme toutes les demi-droites d'origine O rencontrent \mathfrak{S} :

\mathfrak{S} est exactement l'ensemble des points de \mathbf{P} qu'on trouve sur les demi-droites issues de O et sur \mathfrak{H} **au plus proche de O** .

IV.D.

IV.D1. Si λ et μ désignent « les » valeurs propres de M ,

$$M \in \mathbf{S} \cap \mathcal{H} \iff \|M\|^2 = 1 + (\text{Det}(M))^2 \iff \lambda^2 + \mu^2 = 1 + \lambda^2\mu^2 \iff (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2) = 0 \iff \lambda \text{ ou } \mu = \pm 1$$

On en déduit $M \in \mathbf{S} \cap \mathcal{H} \iff \chi_M(1)\chi_M(-1) = 0$

IV.D2.

On en déduit que $M(x, y, z)$ n'appartient à $\mathbf{S} \cap \mathcal{H}$ que si $\chi_M(1) = \frac{1}{2}\chi_{\sqrt{2}M}(\sqrt{2}) = 0$ ou $\chi_M(-1) = \frac{1}{2}\chi_{\sqrt{2}M}(-\sqrt{2}) = 0$, les coordonnées, dans \mathcal{B} , d'un tel point sont caractérisées par la relation :

$$\begin{vmatrix} x+z-\sqrt{2} & y \\ y & z-x-\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} x+z+\sqrt{2} & y \\ y & z-x+\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

C'est-à-dire, après calcul : $(z \pm \sqrt{2})^2 - x^2 - y^2 = 0$. Ainsi, on constate que, $\mathcal{H} \cap \mathbf{S}$ est la réunion des quadriques d'équation : $X^2 + Y^2 = Z^2$ dans les nouveaux repères (translatés du canonique) que définissent les formules :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \\ Z = z \pm \sqrt{2} \end{cases} . \text{ C'est-à-dire que :}$$

$\mathcal{H} \cap \mathbf{S}$ est la réunion des deux cônes de révolution d'axe (Oz) , dont les sommets sont $(0, 0, \pm\sqrt{2})$, les angles au sommet de chacun mesurent $\frac{\pi}{4}$. Ils se coupent suivant le cercle du plan xOy de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

Voici une façon brutale d'aboutir :

$$xS_1 + yS_2 + zS_3 = \begin{pmatrix} x+z & y \\ y & z-x \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \xleftrightarrow{HIA1} x^2 + y^2 + z^2 = 1 + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x+z & y \\ y & z-x \end{vmatrix}^2 =$$

$1 + \frac{1}{4}(z^2 - x^2 - y^2)^2$. On factorise donc $4 + z^4 + x^4 + y^4 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 + 2x^2y^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 - z^2 + 2)^2 - 8z^2$ et

$$M \in \mathbf{S} \cap \mathcal{H} \iff (x^2 + y^2 - z^2 + 2 - 2\sqrt{2}z)(x^2 + y^2 - z^2 + 2 + 2\sqrt{2}z) = 0$$

IV.D3. Remarques concernant la nature de $\mathcal{H} \cap \mathbf{S}$:

- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P(\theta)^{-1} = {}^tP(\theta)$, $P(\theta)M(x, y, z)P(-\theta) \in \mathbf{S}$ est donc clair. On en déduit :
 $\exists (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$; $M(u, v, w) = P(\theta)M(x, y, z)P(-\theta)$ ce que rédémontre le calcul suivant :

$$P(\theta)M(x, y, z)P(-\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z + x \cos 2\theta - y \sin 2\theta & x \sin 2\theta + y \cos 2\theta \\ x \sin 2\theta + y \cos 2\theta & z - (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta) \end{pmatrix}$$

$$= (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta)S_1 + (x \sin 2\theta + y \cos 2\theta)S_2 + zS_3 \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos 2\theta - y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta + y \cos 2\theta \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} P(2\theta) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{« déf »}}{=} \Pi(2\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On remarque que la fonction : $\Phi : \begin{cases} O_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{E} \\ Q \longrightarrow QM^tQ \end{cases}$ qui laisse évidemment stable \mathbf{S} , est une isométrie de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ puisque ${}^t(QM^tQ)(QM^tQ) = Q^tMMQ = Q^{-1}{}^tMMQ \simeq {}^tMM$. on en déduit que

$$\forall M \in \mathbf{E} \|\Phi(M)\|^2 = \|M\|^2 \text{ et } (\text{Det}(\Phi(M)))^2 = (\text{Det}(M))^2$$

donc Φ laisse aussi \mathcal{H} invariant. La formule encadrée prouve donc que $\mathcal{H} \cap \mathbf{S}$ est de révolution autour de (O, z) .

- Plus géométriquement : $\mathbf{S} \cap SO_2(\mathbb{R}) = \{\mathbf{I}_2, -\mathbf{I}_2\}$ et $O_2^- \subset \mathbf{S}$. On sait aussi (IIIB2), que \mathcal{H} est la réunion des droites passant par $SO_2(\mathbb{R})$ et O_2^- c'est-à-dire que \mathcal{H} est la réunion des **cônes** de sommets $\pm \mathbf{I}_2$ et de base O_2^- . Ces droites sont aussi incluses dans \mathbf{S} , $\mathbf{S} \cup \mathcal{H}$ est donc la réunion de nos deux cônes. D'autre part O_2^- est la partie de l'hyperplan \mathbf{S} constituée des points $M(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+z & y \\ y & z-x \end{pmatrix}$ dont les coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{B} vérifient (calcul aisé) $z = 0$ et $x^2 + y^2 = 2$: c'est le cercle, base de nos cônes de révolution. $\pm \mathbf{I}_2$ sont $\pm \sqrt{2}S_3$. Cette structure géométrique se retrouve dans le cas analogue suivant.

- Considérons $\mathbf{T} \stackrel{\text{« déf »}}{=} \text{Ker}(\text{Tr}) = \mathbf{E}_2 \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $\mathbf{T} \cap SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ P\left(\frac{\pi}{2}\right), P\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\}$ et $O_2^- \subset \mathbf{T}$, la **base orthonormale adaptée** $(T_1, T_2, T_3) \stackrel{\text{« déf »}}{=} \left(S_1, S_2, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ conduit, *mutatis mutandis*, aux mêmes résultats. Voici le point commun à ces deux exemples qui explique l'identité des arguments :

- Tout vient du fait que nos exemples d'hyperplans « respectent » la décomposition **orthogonale** : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 \oplus \mathbf{E}_1$. Précisément : dès que $\mathbf{H} = \mathbf{E}_2 \oplus D$ ou $D \oplus \mathbf{E}_1$, $\mathfrak{H} \stackrel{\text{« déf »}}{=} \mathbf{H} \cap \mathcal{H}$ est **une réunion de cônes de révolutions de même axe**. Considérons en effet une base orthonormale adaptée : (H_1, H_2, H_3) , disons dans le second cas. $(H_2, H_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{I}_2, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et $H_1 = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ une matrice de norme 1 ($c^2 + d^2 = \frac{1}{2}$) dirigeant $D \subset \mathbf{E}_2$. Cette droite rencontre O_2^- lorsque la « matrice courante » : λH_1 vérifie $\lambda^2 = 1$ c'est-à-dire aux points opposés $\pm H_1$ de $(O, x) \subset \mathbb{R}^3 \sim \mathbf{H}$. D'autre part $\mathbf{H} \supset \mathbf{E}_1 \supset SO_2(\mathbb{R})$ dont l'équation, dans (H_2, H_3) est (calcul facile) $y^2 + z^2 = 2$. On est donc dans le cas rencontré 2 fois, rendu général.

IV.D4. La partie (compacte) $\mathcal{S} \cap \mathbf{S}$ de $\mathcal{H} \cap \mathbf{S}$ est constituée des « éléments » $M(x, y, z)$ de notre réunion de cônes qui vérifient de plus $|\text{Det}(M(x, y, z))| \leq 1$ c'est-à-dire $|x^2 + y^2 - z^2| \leq 2$ ou $-2 \leq x^2 + y^2 - z^2 \leq 2$ ces inéquations caractérisent les éléments du premier cône : $x^2 + y^2 - z^2 + 2 - 2\sqrt{2}z = 0$ qui vérifient $0 \leq z \leq \sqrt{2}$, c'est la partie d'icelui située entre son sommet et le plan xOy de même pour le second cône : $x^2 + y^2 - z^2 + 2 + 2\sqrt{2}z = 0$, on ne retient, dans \mathcal{S} , que les (x, y, z) tels que $-\sqrt{2} \leq z \leq 0$ d'où le dessin.

