

1. Questions préliminaires

a. i. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ on obtient que :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & q_1 \\ c & d & q_2 \\ r_1 & r_2 & s \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} a' & b' & q'_1 \\ c' & d' & q'_2 \\ r'_1 & r'_2 & s' \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$Y = \begin{pmatrix} aq'_1 + bq'_2 + q_1s' \\ cq'_1 + dq'_2 + q_2s' \end{pmatrix} \text{ soit } Y = PQ' + QS'$$

ii. ${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tP & {}^tR \\ {}^tQ & S \end{pmatrix}$

b. .

i. $\| -X_1 \| = \| X_1 \|$ et d'autre part $(-X_1).X_2 = -X_1.X_2$ donc $(-X_1).X_2 = 0$ et $(-X_1, X_2)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^2 . De plus $B(-X_1) = -BX_1$ en supposant que X_1 est vecteur propre pour B associé à la valeur propre λ_1 : $-X_1 \neq 0$ et $B(-X_1) = -\lambda_1 X_1$ donc $-X_1$ est vecteur propre de B pour la valeur propre λ_1 . De même pour X_2

ii. S est une matrice symétrique réelle donc il existe une matrice D diagonale et une matrice orthogonale N réelles telles que : $S = ND'N$. On peut remplacer le premier vecteur colonne de N par son opposé grâce à la question précédente. Donc $S = LD'L$

iii. $\det N = -\det L$ donc comme ce sont 2 matrices orthogonales donc de déterminant 1 en valeur absolue. N ou L est une matrice de rotation donc de la

$$\text{forme : } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

c. $\det(R - I) = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta$ donc : $\det(R - I) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0[2\pi]$ or $R \neq I$ donc $R - I$ est inversible.

2. .

a. i. $M = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det M = \det R$ et $\det M = 1$

ii. Prendre $p = 0, q = 1$ le produit scalaire des 1er et 3ème vecteurs colonnes donne : $\sin \theta$ donc n'est pas nul. la matrice $M(\theta, p, q)$ n'est pas orthogonale. On peut déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit. Une matrice orthogonale est une matrice de changement de bases orthonormales : Une condition nécessaire est que le 3ème vecteur colonne soit de norme 1 donc : $p = 0, q = 0$. On vérifie que les vecteurs colonnes de la

$$\text{matrice } \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont unitaires et orthogonaux 2 à 2.}$$

$M(p, q, \theta)$ est orthogonale si et seulement si : $p = 0, q = 0$

b.

i. $M(\theta, p, q)M'(\theta', p', q') = \begin{pmatrix} RR' & RT' + T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc de la structure de groupe de l'ensemble des matrices de rotation de $M_2(\mathbb{R})$: $M(\theta, p, q)M'(\theta', p', q') \in \mathbf{G}$

ii. $M(\theta, p, q)M'(\theta', p', q') = \begin{pmatrix} R(\theta + \theta') & RT' + T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$M(\theta, p, q)M'(\theta', p', q') = I \Leftrightarrow \begin{cases} \theta' = -\theta[2\pi] \\ T' = -R(-\theta)T \end{cases} \text{ soit}$$

$$M(\theta, p, q)M'(\theta', p', q') = I \Leftrightarrow \begin{cases} \theta' = -\theta[2\pi] \\ p' = -p \cos \theta - q \sin \theta \\ q' = p \sin \theta - q \cos \theta \end{cases}$$

iii. \mathbf{G} n'est pas vide : $I \in \mathbf{G}$. Du II.B.1 le produit est stable dans \mathbf{G} et de II.B.2 tout élément de \mathbf{G} possède un inverse dans \mathbf{G} . \mathbf{G} est donc un sous-groupe de $M_3(\mathbb{R})$

c.

i. $M(\theta, p, q) - XI_3 = \begin{pmatrix} R - XI_2 & T \\ 0 & (1 - X) \end{pmatrix}$ donc

$$P_{M(\theta, p, q)} = \det(R - XI_2)(1 - X) \text{ soit } P_{M(\theta, p, q)} = (X^2 - 2X \cos \theta + 1)(1 - X)$$

ii. $R \neq I$

A. $X^2 - 2X \cos \theta + 1$ a pour discriminant $-4 \sin^2 \theta$

$\theta = \pi[2\pi]$ $P_{M(\theta, p, q)} = (X + 1)^2(1 - X)$ et les valeurs propres réelles de $M(\theta, p, q)$ sont 1 et -1

$\theta \neq \pi[2\pi]$ $M(\theta, p, q)$ n'a qu'une seule valeur propre réelle : 1

B. Dans tous les cas : 1 est valeur propre simple donc la dimension du

sous-espace propre associé est 1, soit $X_0 \begin{pmatrix} V_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $V_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un

élément de ce sous-espace propre :

$$M(\theta, p, q)X_0 = X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} RV_0 + T \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ soit}$$

$$M(\theta, p, q)X_0 = X_0 \Leftrightarrow V_0 = (I - R)^{-1}T$$

d.

i. $P(x, y)$ donc $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{T} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$

ii. $P' = r(P) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ donc

$$P' = r(P) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_0 + \cos\theta(x - x_0) - \sin\theta(y - y_0) \\ y' = y_0 + \sin\theta(x - x_0) + \cos\theta(y - y_0) \end{cases}$$

$$\text{iii. } \overrightarrow{PP'} = \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \\ 1 = 1 \end{cases} \text{ donc}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{T} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = r(P) \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = \cos\theta(x - x_0) - \sin\theta(y - y_0) \\ y' - y_0 = \sin\theta(x - x_0) + \cos\theta(y - y_0) \\ 1 = 1 \end{cases}$$

donc

$$P' = r(P) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_0 - \cos\theta x_0 + \sin\theta y_0 \\ \sin\theta & \cos\theta & y_0 - \sin\theta x_0 - \cos\theta y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_0 - \cos\theta x_0 + \sin\theta y_0 \\ \sin\theta & \cos\theta & y_0 - \sin\theta x_0 - \cos\theta y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv. .

$$\text{A. } M(\theta, p, q) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } M(\theta, p, q)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RV + T \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{B. Soit } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = M(\theta, p, q) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ on obtient que : } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = RV + T$$

donc $\overrightarrow{OP'}$ est l'image de \overrightarrow{OP} par la composée de la translation de matrice T et de la rotation d'angle θ donc P' est l'image de P par un déplacement du plan.

C. Si ce déplacement est une rotation de centre P_0 et $V_{P_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

$$M(\theta, p, q) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc : } V_{P_0} = RV_{P_0} + T \text{ soit :}$$

$$V_{P_0} = (I - R)^{-1}T$$

3. .

- a. i. Soit $Q \in \mathbf{S}$ et $Q' = {}^tMQM$ donc ${}^tQ' = {}^tM{}^tQM$ donc comme $Q \in \mathbf{S}$ ${}^tQ' = Q'$ et $Q' \in \mathbf{S}$
- ii. $Q = {}^tI_3QI_3$ et $I_3 \in \mathbf{G}$ donc Q est une transformée de Q .
- iii. Soit $Q' = {}^tMQM$, M est de déterminant égal à 1 donc inversible et $Q = {}^tM^{-1}Q'M^{-1}$ or $M^{-1} \in \mathbf{G}$ donc Q est une transformée de Q'
- iv. Soit Q' est une transformée de Q , Q'' est une transformée de Q' . il existe 2 matrices M et M' de \mathbf{G} telles que : $Q' = {}^tMQM$ et $Q'' = {}^tM'Q'M'$ donc $Q'' = {}^tM'{}^tMQMM'$ soit $Q'' = {}^tNQN$ avec $N = MM'$ De la structure de groupe de \mathbf{G} , on en déduit que : $N \in \mathbf{G}$ et donc que Q'' est une transformée de Q . La relation "est transformée de " est ainsi une relation d'équivalence sur \mathbf{S} .

b. .

i. Par blocs, ${}^tMQM = \begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tT & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & U \\ {}^tU & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tRSR & * \\ * & * \end{pmatrix}$

donc $S({}^tMQM) = {}^tRS(Q)R = R^{-1}S(Q)R$.

- ii. Soit $Q' = {}^tMQM$; $p_2(Q') = \det(S(Q')) = \det({}^tR) \det(S(Q)) \det(R) = \det(S(Q)) = p_2(Q)$ car $\det(R)=1$.

D'autre part, $S(Q)$ et $S(Q')$ étant semblables ont même trace; d'où $p_1(Q') = p_1(Q)$.

- iii. on a: $\det(Q') = \det({}^tM) \det(Q) \det(M) = \det(Q)$ car $\det(M) = 1$.
i.e $p_3(Q') = p_3(Q)$.

c. .

- i. $S(Q)$ est symétrique ;il existe donc une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et une

matrice $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (cf IB3) telles que :

$$S(Q) = R \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^tR$$

Soit $M = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q' = {}^tMQM$; on a:

$$S(Q') = {}^t RS(Q)R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

donc Q' est de la forme $Q(\lambda, 0, \mu, d', e', f')$

ii. $p_1(Q) = p_1(Q') = \lambda + \mu.$

$p_2(Q) = p_2(Q') = \lambda\mu.$

iii. $p_2(Q) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\mu = 0.$

Quitte à échanger les rôles de λ et μ , on peut supposer $\mu = 0.$

d. ${}^tMQ'M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & d' \\ 0 & \mu & e' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda p + d' \\ 0 & \mu & \mu q + e' \\ \lambda p + d' & \mu q + e' & f'' \end{pmatrix}$

avec $f'' = p(\lambda p + d') + q(\mu q + e') + pd' + qe' + f'$

e. .

i. $p_2(Q) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda\mu \neq 0$; $Q'' = {}^tMQ'M$ est diagonale si et seulement s'il existe p et q tels que:

$$\begin{cases} \lambda p + d' = 0 \\ \mu q + e' = 0 \end{cases}, \text{ i.e } p = -\frac{d'}{\lambda} \text{ et } q = -\frac{e'}{\mu}$$

dans ce cas, $\det(Q'') = p_3(Q) = p_2(Q)f'' \Rightarrow f'' = \frac{p_3(Q)}{p_2(Q)}.$

A. $p_2(Q) = 0, p_1(Q) \neq 0, p_3(Q) \neq 0$

On peut supposer $\mu = 0$ (cf IC3); $Q'' = {}^tMQ'M$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda p + d' \\ 0 & 0 & e' \\ \lambda p + d' & e' & f'' \end{pmatrix} \text{ or } p_3(Q) = p_3(Q') \text{ donc non nuls et ainsi}$$

$-\lambda e'^2 \neq 0$

Q'' est égale à $Q(\lambda, 0, 0, 0, e', 0)$ si et seulement s'il existe p et q tels que:

$$\begin{cases} \lambda p + d' = 0 \\ f'' = p(\lambda p + d') + qe' + pd' + qe' + f' = 0 \end{cases}, \text{ i.e } p = -\frac{d'}{\lambda} \text{ et}$$

$$q = \frac{d'^2 - f'\lambda}{2\lambda e'}$$

B. $p_2(Q) = 0, p_1(Q) \neq 0, p_3(Q) = 0.$

$p_1(Q) = \lambda$ donc non nuls et $p_3(Q) = -\lambda e'^2 = 0$ donc $e' = 0$

$$Q'' = {}^tMQ'M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda p + d' \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda p + d' & 0 & f'' \end{pmatrix} \text{ est égale à } Q(\lambda, 0, 0, 0, 0, f'') \text{ si}$$

et et seulement s'il existe p tel que: $\lambda p + d' = 0, \text{ i.e } p = -\frac{d'}{\lambda}$

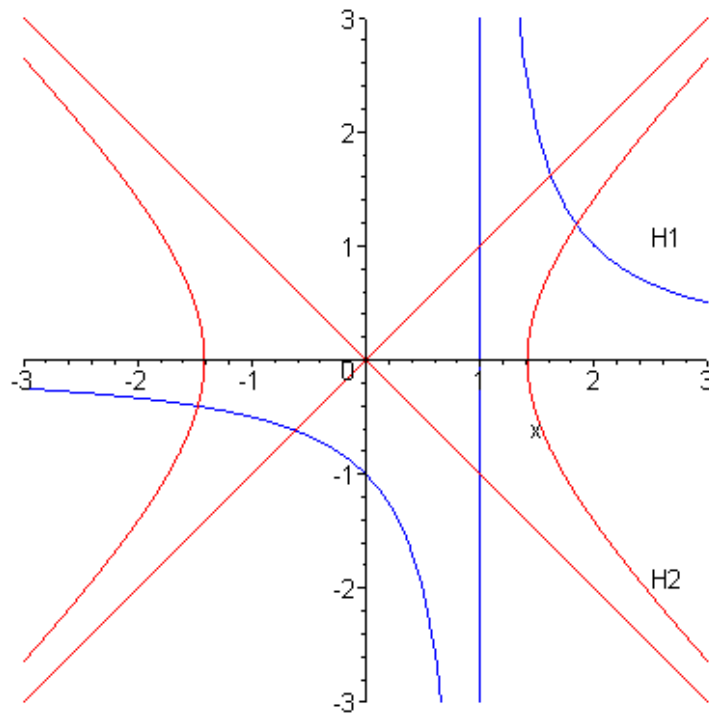
C. $p_2(Q) = 0, p_1(Q) = 0.$

On alors $\begin{cases} p_1(Q) = a + c = \lambda + \mu = 0 \\ p_2(Q) = ac - b^2 = \lambda\mu = 0 \end{cases}$ donc $\lambda = \mu = 0$

Par suite $S(Q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice nulle, donc est nulle.
d'où $a = b = c = 0$.

4. .

a. $(H_1) : xy - y - 1 = 0; (H_2) : x^2 - y^2 - 2 = 0$



b. On a : ${}^tP_1QP_1 = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$${}^tP_1QP_1 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

P appartient à C si et seulement si ${}^tP_1QP_1 = 0$.

c. .

i. Soit $P'_1 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à $d(P)$; on $P'_1 = MP_1$

$$d(P) \in C \Leftrightarrow {}^tP'_1QP'_1 = 0 \Leftrightarrow {}^tP_1{}^tMQMP_1 = 0.$$

ii. C est associée à $Q' = {}^tMQM$.

iii. M appartient à \mathcal{G} donc Q' est une transformée de Q.

d. On reprend III.E

i. $p_2(Q) \neq 0$; il existe une matrice diagonale $Q'' = \text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$ transformée de Q; donc C est l'image de C_1 d'équation : $\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu = 0$.

ii. $p_2(Q) = 0$

A. $p_1(Q) \neq 0, p_3(Q) \neq 0; C_1 : \lambda x^2 + 2e'y = 0$

B. $p_1(Q) \neq 0, p_3(Q) = 0; C_1 : \lambda x^2 + f'' = 0$

C. $p_1(Q) = 0; a = b = c = 0; C_1 : 2d'x + 2e'y + f'' = 0$

e. $P(x,y) \in C \Leftrightarrow {}^t P_1 Q P_1 = 0 \Leftrightarrow {}^t P_1 (\alpha Q) P_1 = 0, \alpha \neq 0$

donc C est aussi associée à αQ .

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ est diagonale}$$

$p_2(Q_1) = -1/4$; soit $Q'_1 = 2Q_1$;

On a : $p_2(Q'_1) = -1 = p_2(Q_2)$; $p_1(Q'_1) = 0 = p_1(Q_2)$ et $p_3(Q'_1) = 2 = p_3(Q_2)$

Donc Q'_1 est transformée de Q_2 ; par suite H_1 est l'image de H_2 par un déplacement