ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

M et P'

Concours d'Admission 1975 (Option P': voir note en fin de 4^{me} page)

MATHEMATIQUES I - (quatre pages dactylographiées)

I - Cette première partie est indépendante du reste du problème.

A tout couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ on associe l'application

$$f_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} (\lambda x + \mu)$$

On désigne par $\Gamma_{\lambda,\mu}$ la représentation graphique de $f_{\lambda,\mu}$ dans un plan euclidien Π rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Montrer que chacune des courbes de la famille $\Gamma_{\lambda,\mu}$, $(\lambda \neq 0)$, se déduit simplement de l'une des courbes de la famille $\Gamma_{1,\mu}$, $(\mu \geqslant 0)$

2°) a) Etudier l'application $f_{1,\mu}$, $(\mu \geqslant 0)$

b) Soit T_m l'ensemble des points $M \in \Pi$ tels qu'il passe par M une courbe $\Gamma_{1,\mu}$ admettant une tangente en M de coefficient angulaire donné m. Donner une équation cartésienne de T_m. Construire T_o et T_1.

c) Quel est le nombre des points d'inflexion d'une courbe $\Gamma_{1,\mu}$? Construire l'ensemble I des points d'inflexion des $\Gamma_{1,\mu}$.

d) Construire les courbes $\Gamma_{1,0}$ et $\Gamma_{1,1}$.

N.B. Toutes les courbes seront tracées sur une même figure.

II - Cette deuxième partie concerne des suites de polynômes à une indéterminée X sur le corps $\mathbb{R}$. On note (Q) la suite $n \mapsto Q_n(X)$ de termes successifs $Q_o, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots$, On dira que (Q) est une A-suite si pour tout $k \geqslant 1$ les termes consécutifs Q_{k-1}, Q_k, Q_{k+1} vérifient l'égalité :

$$(A) \quad \boxed{Q_{k+1} = X\,Q_k + k\,Q_{k-1}}$$

1°) Notant Q' le polynôme dérivé de Q, montrer que chaque A-suite vérifie aussi, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\left[Q'_{k+1} - (k+1)\,Q_k\right] = X\left[Q'_k - k\,Q_{k-1}\right] + k\left[Q'_{k-1} - (k-1)\,Q_{k-2}\right].$$

En déduire qu'à toute A-suite (Q) est associée une A-suite unique (R) vérifiant :

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad R_k = Q'_k - k\,Q_{k-1}.$$

Exemple : on donne $Q_o = X + 1$,
$Q_1 = X - 1$. Trouver R_2, R_1, R_o

2°) On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré est 1 . Démontrer l'existence d'une suite unique (P) de polynômes unitaires P_0 , P_1 ,..... P_n.. vérifiant à la fois pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{cases} (B_1) & P_{k+1} = X P_k + P'_k \\ (B_2) & P'_k = k P_{k-1} \end{cases}$$

Trouver P_o , P_1 , P_2 , P_3 .

3°) (Cette question est indépendante de tout le reste du problème)
On considère la suite numérique (x_k) définie par :

$$x_k = \frac{P_{k+1}(1)}{P_k(1)}$$ Former une relation liant x_k et $\frac{k}{x_{k-1}}$

Démontrer par récurrence l'encadrement :

$$\forall k \geqslant 0 , \quad \frac{1}{2} + \sqrt{k + \frac{1}{4}} \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{k + \frac{5}{4}}$$

En déduire que la suite (x_k) est croissante, ainsi que la suite $\left(\frac{P_k(1)}{\sqrt{k!}}\right)$

III - $\mathcal{C}$ désigne le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables ; les dérivées d'un élément f de $\mathcal{C}$ sont notées f', f'',.... $f^{(k)}$...
Si σ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$, ses composés par lui-même sont notés
$\sigma \circ \sigma = \sigma^2$, $\sigma^{k-1} \circ \sigma = \sigma^k$,... ; σ^0 désigne éventuellement (pour tout σ) l'application identique de $\mathcal{C}$.
Soit $\wp$ l'endomorphisme de $\mathcal{C}$ qui à f associe $\wp(f) = f' + xf$.

1) a) Déterminer $\wp^2(f)$. Expliciter $\wp(f)$ et $\wp^2(f)$ pour la fonction $f_{\lambda,\mu}$ définie dans I .

b) Déterminer les noyaux $\ker \wp$, $\ker \wp^2$,..., $\ker \wp^n$ des endomorphismes $\wp$, $\wp^2$,..., $\wp^n$ de $\mathcal{C}$. (On conseille de définir les fonctions f cherchées par $x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} g(x)$.)

c) Intégrer l'équation différentielle :

$$y'' + 2xy' + (x^2+1)\, y = e^{-\frac{x^2}{2}} (x+1) .$$

2) On reprend ici les polynômes P_k obtenus dans II 2°, et par abus de notation on conserve la même lettre pour désigner la fonction polynôme $x \longmapsto P_k(x)$

Etudier l'image $\varphi(P_k)$. Que peut-on dire de l'espace vectoriel de fonctions engendré par $P_0, P_1, \dots, P_n$? A quelle condition nécessaire et suffisante sur le polynôme ϖ existe-t-il une solution polynôme de l'équation $\mathcal{C}(y) = \varpi$?

Exemple : $\varpi(x) = x(x+\lambda)^2 + 4$, λ donné. Discuter.

3) a) A tout réel α on associe l'élément F_α de $\mathcal{C}$ défini par :

$$x \longmapsto F_\alpha(x) = e^{\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}}.$$

Démontrer pour tout α et tout k la relation :

$$(\forall x \in R) \quad (\varphi^k(F_\alpha))(x) = P_k(x+\alpha) \, . \, F_\alpha(x)$$

où P_k a même signification qu'au 2 : quel lien y a-t-il entre P_k et la dérivé $k^{\text{ème}}$ de $x \longmapsto e^{\frac{x^2}{2}}$?

b) Soit $\{A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{kk}\}$ l'ensemble des coefficients (éléments de $\mathcal{C}$) qui permettent d'exprimer pour tout élément f de $\mathcal{C}$, l'image $\varphi^k(f)$ par la combinaison :

$$\varphi^k(f) = A_{k_0} f^{(k)} + \dots + A_{kj} f^{(k-j)} + \dots + A_{kk} f$$

Appliquant cette relation à F_α, exprimer A_{kj} en fonction seulement de k, de j et de $P_j(x)$.

c) Etudier la convergence, pour α et x fixée, de la série $\sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} P_n(x)$ et trouver sa somme. (Dériver d'abord en α).

IV - On se restreint désormais au R espace vectoriel $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$, formé des fonctions réelles séries entières de la variable réelle x, convergentes sur R. Les endomorphismes de $\mathcal{C}$ qui seront considérés laissent $\mathcal{C}_0$ stable, et on prendra sans notation nouvelle leur restriction à $\mathcal{C}_0$.

1°) Soit $f = \sum_0^\infty a_n x^n$ élément de $\mathcal{C}_0$

On pose : $\varphi(f) = \sum_0^\infty a'_n x^n$

$$\varphi^2(f) = \sum_0^\infty a''_n x^n$$, où φ à la même signification qu'au III.

Exprimer les a'_i, et éventuellement les a''_i, en fonction des a_i. Retrouver $\ker \varphi$ et $\ker \varphi^2$.

2°) On définit $g_k \in \mathcal{C}_0$ par :

$$g_k(x) = \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+2}}{k.(k+2)} + \dots + (-1)^i \frac{x^{k+2i}}{k(k+2)\dots(k+2i)} + \dots$$

a) calculer $\mathcal{C}(g_k)$. Résoudre dans $\mathcal{C}_o$: $\mathcal{C}(y) = 1$.

b) étudier la convergence de la série :

$$g_1(x) + \frac{2g_2(x)}{1!} + \frac{3g_3(x)}{2!} + \ldots + \frac{ng_n(x)}{(n-1)!} + \ldots$$

et trouver sa somme .

V - On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{S}$ des séries entières de x et une application Φ de $\mathcal{C}_o$ dans $\mathcal{S}$ définie de la façon suivante : à la série $f = \sum_0^{\infty} a_i\ x^i$ correspond la série $\Phi(f) = \sum_0^{\infty} b_i\ x^i$ avec $b_i = \sum_{E_i} \lambda_{ij}\ a_j$; E_i est une partie finie de $\mathbb{N}$, qui dépend de i , λ_{ij} sont des réels donnés avec $j \in E_i$.

1°) Dans cette première question on suppose $E_i = \{i\}$ et $\lambda_{ii} = i\,!$. L'application Φ correspondante est-elle un endomorphisme de $\mathcal{C}_o$?

2°) On fixe $E_o = \{0, 1, .., p\}$; on cherche les E_i et les coefficients λ_{ij} pour que, sur toute série entière f, l'application Φ et la dérivation, notée D , commutent $\Phi\left[D(f)\right] = D\left[\Phi(f)\right]$.
Définir E_i pour chaque i et montrer que Φ est déterminée par le choix des λ_{oj} $(o \leq j \leq p)$ et obtenue par la combinaison $\sum_o^p \lambda_{oj} \cdot \Phi_j$ de transformations particulières Φ_j dont on précisera la nature. Φ_j définit-il un endomorphisme de $\mathcal{C}_o$?

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et Θ l'application Φ précédente pour laquelle $\lambda_{oo} = 1$, $\lambda_{o1} = \theta, ..$ $\lambda_{oj} = \theta^j$, exprimer $\Theta(f)$ sans utiliser les dérivées de f lorsque f est un polynôme de degré au plus égal à p.

3°) $\mathcal{C}$ est défini comme dans les parties antérieures.

Montrer que, dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{C}$, $(D \circ \varphi - \varphi \circ D)$, et plus généralement $(D \circ \varphi^k - \varphi^k \circ D)$ s'expriment au moyen des composés de φ par lui-même.

Chercher des solutions de l'équation $D \circ \Phi - \Phi \circ D = Id_{\mathcal{C}}$ dans laquelle l'inconnue est l'endomorphisme Φ de $\mathcal{C}$.

==========

Note: La première épreuve de MATHEMATIQUES en P' est la même que celle-ci à quelques suppressions près: II 3°; III 3° c) et IV 2° b), soulignées dans la marge gauche de l'énoncé.

F I N

ooooo

ooo

o