

**Concours E3A 2005**  
**Math A - PC**

---

**Partie I**

**I.1**  $T_2(X) = 2X^2 - 1$  et  $T_3(X) = 4X^3 - 3X$ .

**I.2** Montrons par récurrence sur  $m$  que  $T_m$  est un polynôme de degré  $m$ , de coefficient dominant  $2^{m-1}$  si  $m \geq 1$  et vérifiant de plus  $T_m(-X) = (-1)^m T_m(X)$  (ce qui entraîne que  $T_m$  a la parité de  $m$ ). C'est vérifié pour  $m = 1$  et  $m = 2$ . Supposons la propriété vraie pour  $m - 1$  et  $m$ . De  $T_{m+1}(X) = 2XT_m(X) - T_{m-1}(X)$  on déduit, puisque  $\deg(T_{m-1}) = m - 1 < m + 1 = \deg(2XT_m)$ , que  $T_{m+1}$  est de degré  $m + 1$  et que son coefficient dominant est  $2^m$ . De plus,  $T_{m+1}(-X) = -2XT_m(-X) - T_{m-1}(-X) = (-1)^{m+1} T_{m+1}(X)$ . La propriété est vraie au rang  $m + 1$ , elle est donc vraie pour tout  $m$ .

**I.3** La famille  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est composée de polynômes ayant des degrés distincts inférieurs ou égaux à  $n$ , elle est donc libre dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . De plus, son cardinal est égal à  $n + 1$  qui est la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$ , c'est donc une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**I.4** a) On montre par récurrence sur  $n$  que  $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ . C'est vérifié pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . Supposons la propriété vraie pour  $n - 1$  et  $n$ . De  $\cos(nx + x) + \cos(nx - x) = 2 \cos(nx) \cos(x)$  on déduit  $\cos(nx + x) = 2 \cos(x) T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)$  d'où  $\cos(nx + x) = T_{n+1}(\cos x)$ . La propriété est vraie pour  $n + 1$ , elle est donc vraie pour tout  $n$ . La propriété  $T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$  se démontre de la même façon en remplaçant  $\cos$  par  $\operatorname{ch}$ .

b) Si  $|u| \leq 1$  il existe  $x$  tel que  $u = \cos(x)$  donc  $|T_n(u)| = |T_n(\cos x)| = |\cos(nx)| \leq 1$ .

c) Si  $u > 1$  il existe  $x > 0$  tel que  $u = \operatorname{ch}(x)$  donc  $|T_n(u)| = |T_n(\operatorname{ch}(x))| = \operatorname{ch}(nx) > 1$  puisque  $nx > 0$ .

d) Si  $u < -1$ ,  $-u > 1$  donc  $|T_n(u)| = |(-1)^n T_n(-u)| = |T_n(-u)| > 1$ .

**I.5** a)  $T_n(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{2n}\pi$  avec  $0 \leq k \leq n - 1$  pour que  $x \in [0, \pi]$ .

b) Les nombres  $\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$  pour  $0 \leq k \leq n - 1$  sont distincts deux à deux et compris entre  $-1$  et  $1$  puisque  $\cos$  est une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ .  $T_n$  a donc  $n$  racines distinctes dans  $[-1, 1]$ . Il n'a pas d'autres racines puisqu'il est de degré  $n$ .

c) 
$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \right).$$

**I.6**  $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inx} = \frac{1}{1 - te^{ix}}$  (série géométrique de raison  $te^{ix}$  de module inférieur à 1).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cos nx = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inx} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 - te^{-ix}}{(1 - te^{ix})(1 - te^{-ix})} \right) = \frac{1 - t \cos x}{1 - 2t \cos x + t^2}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin nx = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inx} \right) = \frac{t \sin x}{1 - 2t \cos x + t^2}.$$

## Partie II.A

**II.A.1)** L'application qui à  $(P, Q)$  associe  $\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos x)Q(\cos x)dx$  est immédiatement

une forme bilinéaire symétrique. Elle est positive car  $\langle P, P \rangle = \int_0^\pi (P(\cos x))^2 dx \geq 0$ .

Elle est définie puisque  $\langle P, P \rangle = \int_0^\pi (P(\cos x))^2 dx = 0$  entraîne par continuité de  $P$  et  $\cos$  que  $P(\cos x) = 0$  sur  $[0, \pi]$ ;  $P$  a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

**II.A.2)** a) On peut écrire puisque  $p \neq q$  et  $p \neq -q$  :

$$\begin{aligned} \langle T_p, T_q \rangle &= \int_0^\pi T_p(\cos x)T_q(\cos x)dx = \int_0^\pi \cos(px) \cos(qx)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q} \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

b)  $\langle T_0, T_0 \rangle = \pi$  et pour  $n \geq 1$  :

$$\langle T_n, T_n \rangle = \int_0^\pi (\cos(nx))^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2nx) + 1)dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(2nx)}{2n} + x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

c)  $T_n$  est orthogonal à tous les polynômes  $T_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  qui forment une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , il est donc orthogonal à ce sous-espace.

d) Pour  $n \geq 1$ ,  $T_n = 2^{n-1}X^n + Q$  avec  $\deg(Q) \leq n-1$ ;  $Q$  est donc orthogonal à  $T_n$  et par suite  $\langle T_n, T_n \rangle = \langle T_n, 2^{n-1}X^n \rangle$  d'où  $\langle T_n, X^n \rangle = \frac{1}{2^{n-1}} \langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2^n}$ .  
C'est vrai aussi pour  $n = 0$  car  $\langle T_0, 1 \rangle = \pi$ .

**II.A.3** La base  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est orthogonale puisque  $\langle T_p, T_q \rangle = 0$  si  $p \neq q$ .

## Partie II.B

**II.B.1** a)  $c_0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$ .

b)  $\sum_{k=1}^n (e^{ij\frac{\pi}{n}})^k = e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1 - e^{ij\pi}}{1 - e^{ij\frac{\pi}{n}}} = e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1 - (-1)^j}{1 - e^{ij\frac{\pi}{n}}}$  puisque  $e^{ij\frac{\pi}{n}} \neq 0$  pour  $1 \leq j \leq n-1$ .

c)  $c_j$  est la partie réelle de  $\sum_{k=1}^n e^{ijx_k} = e^{-ij\frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^n e^{ijk\frac{\pi}{n}} = e^{ij\frac{\pi}{2n}} \frac{1 - (-1)^j}{1 - e^{ij\frac{\pi}{n}}} = \frac{1 - (-1)^j}{e^{-ij\frac{\pi}{2n}} - e^{ij\frac{\pi}{2n}}} = \frac{1 - (-1)^j}{-2i \sin \frac{j\pi}{2n}}$  qui est imaginaire pur, donc  $c_j = 0$ .

**II.B.2** a)  $I(T_p) = \langle T_p, T_0 \rangle = \pi$  si  $p = 0$  et 0 si  $p > 0$ .

$S_n(T_p) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n T_p(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos(px_k) = \frac{\pi}{n} c_p$  d'où  $S_n(T_p) = \pi$  si  $p = 0$  et 0 si  $0 < p \leq n-1$ . On a donc pour tout  $p \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $I(T_p) = S_n(T_p)$ .

b)  $I$  et  $S_n$  sont clairement des formes linéaires sur  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ; comme elles coïncident sur la base  $(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$ , elles sont égales.

**II.B.3** a) Si  $Q \neq 0$ ,  $\deg(QT_n) \geq n$  alors que  $\deg(R) \leq n-1$ ; par suite,  $\deg(QT_n) = \deg(P) \leq 2n-1$  donc  $\deg(Q) \leq n-1$ .

b)  $I(P) = I(QT_n) + I(R) = \langle Q, T_n \rangle + I(R) = 0 + I(R) = I(R)$  car  $T_n$  est orthogonal à  $Q$ .

c)  $S_n(P) = S_n(QT_n) + S_n(R)$  avec  $S_n(QT_n) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n Q(\cos(x_k))T_n(\cos(x_k)) = 0$  puisque les  $\cos(x_k)$  sont les racines de  $T_n$ . On a donc  $S_n(P) = S_n(R)$  d'où pour  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ ,  $I(P) = I(R) = S_n(R) = S_n(P)$  (car  $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ).

**II.B.4**  $I(T_{2n}) = \langle T_{2n}, T_0 \rangle = 0$  car  $n \geq 1$ .

$$S_n(T_{2n}) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n T_{2n}(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos(2nx_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n (-1) = -\pi.$$

On en déduit que  $I(P) = S_n(P)$  n'est pas vérifié pour un polynôme de degré  $2n$ .

## Partie III

**III.1** On choisit  $a = 0$ ,  $b = \pi$  et la fonction  $f \circ \cos$  qui est continue sur  $[0, \pi]$ . Avec  $p = n$  et  $c_k = x_{k+1} = \frac{2k+1}{2n}\pi \in [\frac{k}{n}\pi, \frac{k+1}{n}\pi]$  on obtient par le théorème des sommes de Riemann :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^\pi f(\cos t) dt = I(f)$ .

**III.2** a)  $f(t) = \ln((a-t)^2 + 1 - t^2)$  avec  $(a-t)^2 \geq 0$  et  $1-t^2 > 0$  pour  $t \in ]-1, 1[$ ; pour  $t = 1$ ,  $(a-1)^2 > 0$  et pour  $t = -1$ ,  $(a+1)^2 > 0$ .  $f$  est donc définie sur  $[-1, 1]$  et continue par continuité de  $\ln$ . On peut donc appliquer le résultat du III.1.

b) i.  $z^{2n} = -1 \Leftrightarrow z = e^{(2k-1)i\frac{\pi}{2n}} = z_k$  avec  $1 \leq k \leq 2n$ . Puisque  $\bar{z}_k = e^{-(2k-1)i\frac{\pi}{2n}} = e^{(4n-2k+1)i\frac{\pi}{2n}} = z_{2n-k+1}$  on déduit  $\bar{z}_1 = z_{2n}$ , ...,  $\bar{z}_n = z_{n+1}$  donc les racines  $(2n)^{\text{èmes}}$  de  $-1$  sont :  $e^{ix_1}, e^{ix_2}, \dots, e^{ix_n}, e^{-ix_1}, e^{-ix_2}, \dots, e^{-ix_n}$ .

ii.  $X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^n ((X - e^{ix_k})(X - e^{-ix_k}))$ .

iii.  $(X - e^{ix_k})(X - e^{-ix_k}) = X^2 - 2\cos(x_k)X + 1$  est un polynôme irréductible sur  $\mathbb{R}[X]$  car ses racines  $e^{ix_k}$  et  $e^{-ix_k}$  ne sont pas réelles puisque  $x_k \notin \pi\mathbb{Z}$ . On obtient bien la factorisation proposée.

iv.  $S_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(a^2 - 2a\cos(x_k) + 1) = \frac{\pi}{n} \ln \prod_{k=1}^n (a^2 - 2a\cos(x_k) + 1) = \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n} + 1)$ .

c) Si  $a \in ]0, 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{2n} = 0$  d'où  $I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = 0$ . Si  $a > 1$ ,  $S_n(f) = \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n}(1 + \frac{1}{a^{2n}})) = 2\pi \ln a + \frac{\pi}{n} \ln(1 + \frac{1}{a^{2n}})$ . On en déduit  $I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = 2\pi \ln a$ .

d) Si  $a \in ]0, 1[$ ,  $S_n(f) - I(f) = S_n(f) \sim \frac{\pi}{n} a^{2n}$  puisque  $\ln(1+x) \sim x$  au voisinage de 0. Si  $a > 1$ ,  $S_n(f) - I(f) = \frac{\pi}{n} \ln(1 + \frac{1}{a^{2n}}) \sim \frac{\pi}{na^{2n}}$ .