

L'objet de ce problème est l'étude des suites de polynômes à coefficients réels  $(P_n)_{n \geq 0}$  satisfaisant aux 3 conditions (C) suivantes :

- (C)      (1)       $P_0(x) = 1$   
             (2)       $P_1$  n'est pas le polynôme nul  
             (3)      Pour tout entier naturel  $n$ , pour tous réels  $x$  et  $y$  on a :

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^n P_k(x) P_{n-k}(y)$$

On ne distingue pas un polynôme et la fonction polynôme associée.

Tout résultat d'une question, même non démontré, pourra être utilisé dans les questions suivantes.

### Partie I -

Dans cette partie, après quelques exemples de suites  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifiant (C), on en donne une construction générale.

#### I.A -

I.A.1) La suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  est définie par :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Montrer que cette suite vérifie (C).

I.A.2) On considère la suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x(x+n)^{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

- a) Vérifier, pour  $n \geq 1$ , la relation  $P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$ .  
 b) En déduire que cette suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifie (C).

I.A.3) Soit une fonction  $u$ , de variable réelle, à valeurs réelles, admettant au voisinage de 0 un développement limité d'ordre  $n$ , pour tout entier  $n$ , et telle que  $u(0) = 0$  et  $u'(0) = a_1$ ,  $a_1$  non nul.

- a) Montrer qu'il existe une suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  de polynômes, unique, telle que pour tout  $n$  :

$$e^{xu(t)} = \sum_{k=0}^n t^k P_k(x) + t^n \varepsilon_n(x,t),$$

la fonction  $t \rightarrow \varepsilon_n(x,t)$  tendant, pour  $x$  et  $n$  fixés, vers zéro quand  $t$  tend vers zéro.

- b) Montrer que la suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifie (C).  
 c) Application : Expliciter  $P_n$  pour  $u(t) = \ln(1+t)$ .

#### I.B -

I.B.1)  $(P_n)_{n \geq 0}$  désigne maintenant une suite quelconque vérifiant (C).

- a) Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $P_n(0) = 0$ .  
 b) Montrer que  $P_1$  est de degré 1.  
 c) On pose  $P_1(x) = a_1 x$ . Montrer que  $P_n$  est de degré  $n$  et expliciter son terme de degré  $n$  en fonction de  $a_1$ .

I.B.2) Pour tout  $n \geq 1$  on pose  $a_n = P'_n(0)$ . Établir, pour tout  $n \geq 1$ , la

relation :

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} P_k(x).$$

I.B.3) Réciproquement on se donne une suite réelle  $(a_n)_{n \geq 1}$ , avec  $a_1 \neq 0$

a) Montrer qu'il existe une suite et une seule  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifiant les 3 conditions (C') suivantes :

$$(C') \begin{cases} (1) & P_0(x) = 1 \\ (2) & P_n(0) = 0 \quad \text{pour } n \geq 1 \\ (3) & P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} P_k(x) \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

b) Démontrer que cette suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifie les conditions (C). On pourra raisonner par récurrence et comparer

$$P'_{n+1}(x+y) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n P_k(x) P'_{n+1-k}(y)$$

Partie II -

Dans cette partie, sauf en II.3, on considère une suite de polynômes vérifiant les conditions équivalentes (C) et (C') et possédant la propriété suivante :

la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$ , où  $(a_n)_{n \geq 1}$  est la suite définie en I

par  $a_n = P'_n(0)$ , a un rayon de convergence R non nul (éventuellement infini).

On se propose d'étudier  $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n$ .

Pour  $|t| < R$  on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{et} \quad \tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (|t|)^n$$

II.1)

a) Établir, pour x réel,  $|t| < R$  et  $n \geq 0$ , les majorations suivantes

$$|t^n P'_n(x)| \leq \tilde{f}(t) e^{|\tilde{f}(t)|} \quad \text{et} \quad |t^n P_n(x)| \leq e^{|\tilde{f}(t)|}$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser les conditions (C').

b) En déduire que, pour tout x réel fixé, les séries entières en t

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x) t^n$$

ont un rayon de convergence au moins égal à R.

II.2) On suppose, dans cette question, t fixé dans ]-R, R[ et x variable.

a) Montrer que la convergence de la série de fonctions de la variable x

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x) t^n$$

est normale sur tout intervalle fermé [-M, M] de R.

(On pourra considérer par exemple  $r^n |P'_n(x)| \left| \frac{t}{r} \right|^n$ , r étant convenablement choisi).

b) On pose

$$S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n.$$

Montrer que  $S_t$  est une fonction de x dérivable sur R et déterminer une relation entre la dérivée  $S'_t(x)$  de cette fonction de x,  $S_t(x)$  et f(t).

c) En déduire

$$S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n = e^{xf(t)}$$

II.3) Réciproquement on se donne une série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$ , avec  $a_1 \neq 0$  de rayon de convergence non nul R, de somme f(t).

Montrer que la fonction de t,  $t \rightarrow e^{xf(t)}$ , définie pour  $|t| < R$ , est, pour tout

réel  $x$  fixé, développable en série entière sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n,$$

où la suite de polynômes  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifie (C).

II.4) Déterminer  $f(t)$  et  $R$  dans les cas suivants :

a)

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour } n \geq 1$$

b)

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$\text{pour } n \geq 2 \quad P'_n(x) = P_{n-2}(x) + P_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad P_n(0) = 0$$

c)

$$P_0(x) = 1$$

$$\text{pour } n \geq 1 \quad P'_n(x) = P_{n-1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad P_n(0) = 0$$

Partie III -

Dans cette partie on reprend la suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  du I.A.2.

On lui associe la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  telle que  $a_n = P'_n(0)$ .

On rappelle la relation  $P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$  pour  $n \geq 1$ .

III.1)

a) Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$ .

$$\text{Soit, pour } |t| < R, f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n.$$

b) En exprimant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x) t^n$$

de deux façons différentes, en fonction de  $x$  et de  $f(t)$ , montrer que l'on a, pour  $|t| < R$ ,

$$te^{f(t)} = f(t).$$

III.2)

a) Étudier les variations de la fonction de la variable réelle  $u$  définie par  $u \rightarrow ue^{-u}$ .

b) En déduire que  $f$  est la fonction réciproque d'une fonction simple  $\varphi$ .

c) Étudier les variations de  $f$  et  $\varphi$  et construire leurs courbes représentatives.

d) Calculer la borne inférieure  $m$  de  $f$  à  $10^{-3}$  près.

III.3)

a) Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$$

converge normalement sur  $[-R, R]$ . En déduire la valeur de la somme de cette série pour  $t = R$  et  $t = -R$ .

b) Soit  $x$  fixé. Montrer la convergence normale de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n$$

sur  $[-R, R]$ . En déduire la valeur de sa somme pour  $t = R$  et  $t = -R$ .

Partie IV -

On considère une suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  vérifiant les conditions équivalentes (C) et (C'), pour la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ , définie par  $a_n = P'_n(0)$

Soit  $R$  le rayon de convergence supposé non nul de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n.$$

Pour  $t$  appartenant à l'intervalle  $] -R, R[$  on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{et} \quad \bar{f}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |t|^n$$

Le résultat suivant est admis : il existe un réel  $r'$  vérifiant  $0 < r' < R$ , une série entière

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k$$

de somme  $g(t)$  dans l'intervalle  $] -r', r'[$  tels que pour  $|t| < r'$  la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| (\bar{f}(t))^k$$

converge et tels que l'on ait, dans  $] -r', r'[$ ,

$$g(f(t)) = f(g(t)) = t.$$

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications linéaires de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  dans lui-même.

**IV.A.**

IV.A.1) Montrer qu'il existe un élément  $U_g$  de  $E$  vérifiant, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  :

$$U_g(P) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n P^{(n)} \quad (P^{(n)} \text{ désigne la dérivée d'ordre } n \text{ de } P).$$

IV.A.2)

- a) Déterminer  $g$  et  $U_g$  pour la suite du I.A.1.
- b) Déterminer les suites  $(P_n)_{n \geq 0}$  et  $(a_n)_{n \geq 1}$  pour que  $U_g$  soit défini par  $U_g(P)(x) = P(x+1) - P(x)$

(On pourra utiliser la formule de Taylor)

- c) Pour les suites  $(P_n)_{n \geq 0}$  du a) et b) précédent et pour l'élément  $U_g$  associé calculer  $U_g(P_n)$

**IV.B.**

On se propose de montrer la propriété ( $C^n$ ) suivante :  $U_g$  défini en IV.A.1 est l'unique élément de  $E$  tel que

$$U_g(P_0) = 0 \quad \text{et pour } n \geq 1 \quad U_g(P_n) = P_{n-1}$$

IV.B.1)

- a) Établir pour  $k \geq 2, n \geq 0, x$  réel et  $t \in ] -R, R[$  la majoration suivante :

$$|P_n^{(k)}(x) t^n| \leq (\bar{f}(t))^k e^{|x| \bar{f}(t)}$$

- b) En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n^{(k)}(x) t^n = (\bar{f}(t))^k e^{x \bar{f}(t)} \quad \text{pour } |t| < R.$$

- c) Montrer que l'expression

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |P_n^{(k)}(x)| |t|^n \right) \quad \text{a un sens.}$$

IV.B.2) On admet que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \left( \sum_{k=1}^{+\infty} b_k P_n^{(k)}(x) \right) \quad \text{a un sens et que pour } x \text{ réel et } |t| < r' :$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \left( \sum_{n=0}^{+\infty} P_n^{(k)}(x) t^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \left( \sum_{k=1}^{+\infty} b_k P_n^{(k)}(x) \right)$$

Établir pour  $|t| < r'$

$$t e^{x f(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \left( \sum_{k=1}^{+\infty} b_k P_n^{(k)}(x) \right)$$

IV.B.3) Montrer que  $U_g$  possède la propriété ( $C^n$ ).

... FIN ...