SADIK Omar CPGE FES — Corrigé du concours Mines ponts 17 maths 1

A. Préliminaires

1) la fonction nulle est un élément de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$.

On a $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$ et $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}$ par définition.

Si $P, Q \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $P + \lambda Q$ est une fonction polynômiale, donc $\mathscr{P}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

Si $f, g \in \mathscr{D}$ alors $\exists R_1, R_2 > 0$ et $\exists (a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites de nombres complexes tels que $\forall x \in]-R_1, R_1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\forall x \in]-R_2, R_2[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Soit $R = \min(R_1, R_2)$, alors :

$\forall x \in]-R, R[, (f+\lambda g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) x^n$.

Donc $\mathscr{D}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

2) Soit $f \in \mathscr{E}$.

• $\forall x \in I$, $\forall t \in [0, \pi/2]$, $|x \sin t| \leq |x| \leq a$ et les applications $t \longmapsto f(x \sin t)$ et $t \longmapsto f'(x \sin t)$ sont continues sur $[0, \pi/2]$, donc $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies sur I.

• $\forall x \in I$, $t \longmapsto f(x \sin t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$

• $\forall t \in [0, \pi/2]$, $x \longmapsto f(x \sin t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

et $\forall p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^p f(x \sin t)}{\partial x^p} = (\sin t)^p f^{(p)}(x \sin t)$ et $\forall x \in I$, $t \longmapsto (\sin t)^p f^{(p)}(x \sin t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$.

• $f^{(p)}$ est continue sur le compact I donc bornée par une constante M_p, alors $\forall x \in I$; $\forall t \in [0, \pi/2]$, $|(\sin t)^p f^{(p)}(x \sin t)| \leq M_p$ et l'application $t \longmapsto M_p$ est continue sur $[0, \pi/2]$ donc $u(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et $\forall p \in \mathbb{N}; \forall x \in I$ $u(f)^{(p)}(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^p f^{(p)}(x \sin t)\, dt$.

f est un élément de $\mathscr{E}$ donc f' aussi, donc $v(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I aussi. donc $u(f), v(f) \in \mathscr{E}$, alors u et v sont des applications de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.

On vérifie facilement que si $f, g \in \mathscr{E}$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\forall x \in I$, $u(f + \lambda g)(x) = [u(f) + \lambda u(g)](x)$ donc $u(f + \lambda g) = u(f) + \lambda u(g)$ donc u est linéaire de même pour v.

3) Si f est constante alors $u(f)$ et $v(f)$ sont aussi des fonctions constantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $f_n(x) = x^n$. Alors $\forall x \in I$, $u(f_n)(x) = \dfrac{2}{\pi} W_n f_n(x)$ et $v(f_n)(x) = nW_{n-1} f_n(x)$.

Puisque u et v sont linéaires, alors $u(\mathscr{P}) \subset \mathscr{P}$ et $v(\mathscr{P}) \subset \mathscr{P}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors par une intégration par parties, on obtient $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t (\sin t)^{n+1} dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t (\sin t)^n dt = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$, donc $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

La relation est vraie pour $n = 0$, soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que cette relation est vraie à l'ordre n alors

$W_{n+1}W_{n+2} = W_{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}W_n = \dfrac{n+1}{n+2}W_n W_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}\dfrac{\pi}{2(n+1)} = \dfrac{\pi}{2(n+2)}$.

La récurrence s'applique et le résultat est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$, $W_n - W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (1 - \sin t) dt$ qui est positive et si on suppose qu'elle est nulle, puisque l'application $t \longmapsto (\sin t)^n (1 - \sin t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$, alors $\forall t \in]0; \pi/2], 1 - \sin t = 0$ ce qui est absurde : donc $(W_n)_n$ est strictement décroissante.

La suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc convergente, soit ℓ sa limite, alors $\ell^2 = 0$ de la relation précédente. donc $\ell = 0$.

On $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n W_{n+1} \le W_n^2 \le W_n W_{n-1}$ vu la monotonie.

Donc $\dfrac{\pi}{2(n+1)} \le W_n^2 \le \dfrac{\pi}{2n}$. donc $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

B. Étude de la continuité de u et de v

6) Soit $f \in \mathscr{E}$ alors $|f|$ est continue sur le compact I, donc bornée et atteint sa borne supérieure, alors $M(f)$ existe. et $M(u(f))$ aussi car $u(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Soit $x \in I$, alors $|u(f)(x)| \le \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} |f(x \sin t)| dt \le M(f)$, alors $M(u(f)) \le M(f)$. u est un endomorphisme donc il est continu de $(\mathscr{E}, M) \longrightarrow (\mathscr{E}, M)$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n(x) = \dfrac{x^n}{a^n\sqrt{n}}$, On a $M(g_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $v(g_n)(x) = nW_{n-1}\dfrac{x^n}{a^n\sqrt{n}}$

Alors $M(v(g_n)) = nW_{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

La suite $(g_n)_n$ tend vers 0 au sens de la norme M tandis que $M(v(g_n)) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ ne tend pas vers 0 au sens de la norme M, Alors v n'est pas continu de $(\mathscr{E}, M) \longrightarrow (\mathscr{E}, M)$.

8) Soit $f, g \in \mathscr{E}$ alors $f' \in \mathscr{E}$ donc N est une application
Si $N(f) = 0$ alors $M(f) = 0$ donc $f = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; $N(\lambda f) = M(\lambda f) + M((\lambda f)') = |\lambda|(M(f) + M(f')) = \lambda N(f)$.
$N(f+g) = M(f+g) + M(f'+g') \leq M(f) + M(f') + M(g) + M(g') = N(f) + N(g)$.
Soit $x \in I$, alors $|v(f)x| \leq |f(0)| + |x| \displaystyle\int_0^{\pi/2} |f'(x\sin t)|dt \leq M(f) + a\frac{\pi}{2}M(f') \leq \max(1, a\frac{\pi}{2})(M(f) + M(f'))$.
Donc $M(v(f)) \leq \alpha N(f)$ où $\alpha = \max(1, a\frac{\pi}{2})$, donc v est continue de $(\mathscr{E}, N) \longrightarrow (\mathscr{E}, M)$.
Supposons qu'il existe $\beta > 0$ tel que $N \leq \beta M$, alors $\forall f \in \mathscr{E}$, $M(v(f)) \leq \beta M(f)$, alors v est continu de $(\mathscr{E}, M) \longrightarrow (\mathscr{E}, M)$ ce qui est absurde de la question 7). Les deux normes ne sont pas équivalents.

9) Soit $f \in \mathscr{E}$ et $\varepsilon > 0$, alors f' est continue sur le compact I par application du théorème de Weierstrass :
$\exists Q \in \mathscr{P}$; tel que $\forall x \in I$; $|f'(x) - Q'(x)| \leq \varepsilon$.
Si $f(0) = Q(0)$ c'est bien si non soit $P(x) = Q(x) - Q(0) + f(0)$, on a bien $P \in \mathscr{P}$ et $P' = Q'$ de plus $P(0) = f(0)$ et $\forall x \in I$; $|f'(x) - P'(x)| \leq \varepsilon$.
On a alors $M((f-P)') \leq \varepsilon$ et $\forall x \in I$; $|(f-P)(x)| = \left|\displaystyle\int_0^x (f-P)'(t)dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_0^x |(f-P)'(t)|dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_0^x \varepsilon dt\right| \leq \varepsilon a$
Alors $M(f-P) \leq \varepsilon a$, donc $N(f-P) \leq (1+a)\varepsilon$, ce qui assure la densité de $\mathscr{P}$ dans $(\mathscr{E}, N)$.

C. Étude de l'inversibilité de u et v

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ de la question 3), si on pose $f_n(x) = x^n$,
Soit $x \in I$, $\quad u(f_n)(x) = \dfrac{2}{\pi} W_n f_n(x)$ et $v(f_n(x) = nW_{n-1} f_n(x)$;
Alors $u \circ v(f_n(x) = \dfrac{2}{\pi} nW_n W_{n-1} f_n(x) = f_n(x)$ de la question 5).
et $v \circ u(f_n)(x) = f_n(x)$ égalité encore vraie pour $n = 0$. Alors $v \circ u = u \circ v = Id_{\mathscr{P}}$, car sont des endomorphismes et égaux sur les éléments d'une base de $\mathscr{P}$.

11) Soit $f \in \mathscr{E}$, par application de la question 9) il existe une suite $(P_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{P}$ qui converge vers f dans $(\mathscr{E}, N)$.
Or $v : \ (\mathscr{E}, N) \longrightarrow (\mathscr{E}, M)$ est continue donc $v(P_n)$ tend vers $v(f)$ dans $(\mathscr{E}, M)$.

L'application $u: \ (\mathscr{E}, M) \longrightarrow (\mathscr{E}, M)$ est continue, donc $u \circ v(P_n)$ tend vers $u \circ v(f)$ dans $(\mathscr{E}, M)$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$; $u \circ v(P_n) = P_n$ et (P_n) tend vers f dans le même espace $(\mathscr{E}, M)$, l'unicité de la limite entraine ; $f = u \circ v(f)$.

Soit $f \in \mathscr{E}$ tel que $v(f) = O$, alors $u \circ v(f) = u(O)$, donc $f = 0$, alors v est injectif donc pas de valeur propre nulle.

12) Soit $f \in \mathscr{E}$ et $x \in I$, alors $M(u(f)) \leq \dfrac{2}{\pi} M(f)$.

et $(u(f))'(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t f'(x \sin t) dt$ donc $|(u(f))'(x)| \leq \dfrac{2}{\pi} M(f')$

Donc $M((u(f))') \leq M(f')$, en rassemblant $N(u(f)) \leq \dfrac{2}{\pi} N(f)$ ce qui se traduit par u est continue de dans $(\mathscr{E}, N)$

Soit $(P_n)_n$ une suite qui tend vers f dans $(\mathscr{E}, N)$; $(Q9))$, alors $u(P_n)$ tend vers $u(f)$ dans $(\mathscr{E}, N)$ par continuité.

Alors $v \circ u(P_n)$ tend vers $v \circ u(f)$ par continuité de v de $(\mathscr{E}, N)$ dans $(\mathscr{E}, M)$.

Donc P_n tend $v \circ u(f)$ dans $(\mathscr{E}, M)$ et P_n tend vers f dans $(\mathscr{E}, N)$ donc dans $(\mathscr{E}, M)$ car $M \leq N$. Par unicité de la limite $f = v \circ u(f)$.

Alors $v \circ v = v \circ u = Id_{\mathscr{E}}$, donc u et sont des automorphismes de $\mathscr{E}$ et $v = u^{-1}$.

13) Soit $f \in \mathscr{E}$, $\forall x \in I$; $u(f')(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt$; donc

$$\frac{\pi}{2} x u(f')(x) = v(f)(x) - f(0)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $u(\arctan')(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x^2 \sin^2 t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (1 + x^2) z^2} dz = \frac{2/\pi}{\sqrt{1 + x^2}} [\arctan(\sqrt{1 + x^2} z)]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Pour calculer $u(\text{argsh}'')$, on calcul d'abord $v(\text{argsh}')(x) = v(\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}})(x) = v \circ u(\arctan')(x) = \arctan' x = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Alors de la formule $\dfrac{\pi}{2} x u(f')(x) = v(f)(x) - f(0)$ appliqué à $f = \text{argsh}' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, on obtient :

$\dfrac{\pi}{2} x u(\text{argsh}'')(x) = v(\text{argsh}')(x) - 1 = \dfrac{1}{1 + x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1 + x^2}$, donc

$u(\text{argsh}'')(x) = \dfrac{-2x}{\pi(1 + x^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ à cause de la continuité.

14) • Soit $f \in \mathscr{E}$ et $x \in I$, alors

$$u(f)(-x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(-x\sin t)\,dt = \begin{cases} -u(f)(x) & \text{si} \quad f \text{ est impaire} \\ u(f)(x) & \text{si} \quad f \text{ est paire} \end{cases}$$

On a la relation $v(f)(x) = f(0) + \dfrac{\pi}{2}xu(f')(x)$, donc

• Si f est impaire alors $f(0) = 0$ et f' est paire et $v(f)$ est impaire.

• Si f est paire alors f' est impaire et $v(f)$ est paire.

Réciproquement :

• Supposons que $u(f)$ est paire. Montrons que f est paire.

Soit $g(x) = f(-x)$, on a $\forall x \in I,;\ u(f)(-x) = u(f)(x)$, donc $\forall x \in I, \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(-x\sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} f(x\sin t)\,dt$

Donc $\forall x \in I, \displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x\sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} f(x\sin t)\,dt$, alors $u(g) = u(f)$; u est injectif donc $f = g$

Alors $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$, donc f est paire.

• En posant $h(x) = -f(x)$, alors si $u(f)$ est impaire alors $h(g) = u(h)$, donc $g = h$, donc f est impaire.

• Supposons maintenant que $v(f)$ est paire alors $\forall x \in I\,;\ f(0)+xu(f')(x) = f(0) - xu(f')(-x)$, donc

$\forall x \in I\,;\ u(f')(x) = -u(f')(-x)$ vu la continuité en 0. ce qui se traduit par $u(f')$ est impaire donc f' est impaire

Alors f est paire. (Primitivation de $f'(-x) = -f'(x)$ avec constante nécessairement nulle

• Supposons maintenant que $v(f)$ est impaire alors $\forall x \in I\,;\ f(0)+xu(f')(x) = -f(0) + xu(f')(-x)$, en particulier pour $x = 0$, on obtient $f(0) = 0$. donc

$\forall x \in I\,;\ u(f')(x) = u(f')(-x)$ vu la continuité en 0. ce qui se traduit par $u(f')$ est paire donc f' est paire

Alors f est impaire. (Primitivation de $f'(-x) = f'(x)$ avec constante nécessairement nulle car $f(0) = 0$.

D. Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v

15) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Si λ est une valeur propre de v, alors $\lambda \neq 0$, car v est injectif. et $\exists f \in \mathscr{E}$ tel que $f \neq 0, \quad v(f) = \lambda f$, alors $u \circ v(f) = \lambda u(f)$.

Donc $u(f) = \dfrac{1}{\lambda} f$, comme $f \neq 0$, alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u.

En composant à nouveau la dernière égalité par v on obtient $\lambda f = v(f)$ alors l'équivalence.

De plus on a montré que $f \in E_\lambda(v) \Longleftrightarrow f \in E_{\frac{1}{\lambda}}(v)$ ce qui ce traduit par :

$$E_{\frac{1}{\lambda}}(v) = E_\lambda(u)$$

16) Soit $f \in \mathscr{D}$, $\exists R > 0$ et $\exists (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]-R,R[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Posons $\forall t \in [0,\pi/2]$; $h_n(t) = a_n x^n (\sin t)^n$, calculons $u(f)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (\sin t)^n dt$.

• Soit $x \in]-R,R[$ fixé, $\forall n \in \mathbb{N}$, h_n est continue sur $[0,\pi/2]$

• La série de fonction $\sum h_n$ converge normalement donc uniformément $[0,\pi/2]$, en effet :

Soit $t \in [0,\pi/2]$, $|h_n(t)| \leq |a_n x^n|$ et la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.

l'un des théorèmes d'intégration terme à terme s'applique et

$u(f)(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2} a_n x^n (\sin t)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi} a_n W_n\right) x^n$, donc $u(f) \in \mathscr{D}$,alors $u(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$.

Soit $x \in I$, on a $v(f)(x) = f(0) + x\frac{\pi}{2}u(f')(x)$, or $f' \in \mathscr{E}$ donc $u(f') \in \mathscr{D}$, donc $v(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$

17) Soit $f \in \mathscr{E}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}|$ est continue sur I compact donc bornée et atteint sa borne supérieure, alors m_n exists.

Soit $x \in I$, et soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda f^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n f^{(n)}(x \sin t) dt$ c'est la question 2)

donc $|\lambda f^{(n)}(x)| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n f^{(n)}(x\sin t) dt\right| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n |f^{(n)}(x \sin t)| dt \leq \frac{2}{\pi} m_n W_n$.

et cette dernière égalité valable pour tout $x \in I$, donc $|\lambda| m_n \leq \frac{2}{\pi} m_n W_n$,

donc $m_n\left(\frac{2}{\pi}W_n - |\lambda|\right) \geq 0$

Or $|\lambda| \neq 0$ et la suite $(\frac{2}{\pi}W_n)_n$ tend vers 0.

A partir d'un certain rang, $\frac{2}{\pi}W_n - |\lambda|$ est négatif strictement donc $m_n = 0$, alors $f^{(n)}$ est nulle à partir d'un certain rang sur I ; en intégrant n fois ; f est un élément de $\mathscr{P}$.

18) Par application de la question précédente ; soit $P = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ , alors l'équation $u(P) = \lambda P$ donne

$$\sum_{n=0}^{N} a_n W_n \frac{2}{\pi} x^n = \sum_{n=0}^{N} \lambda x^n \text{ donc } \forall n \in \{0,1,\dots,N\},\ \ a_n(W_n \frac{2}{\pi} - \lambda) = 0$$

S'il existe deux entiers distincts $m \neq n$ tels que $a_n \neq 0$ et $a_m \neq 0$ (il existent car $P \neq 0$), alors

$\lambda = W_n \dfrac{2}{\pi} = W_m \dfrac{2}{\pi}$ et ceci est absurde avec (W_n) est strictement décroissante.

Donc nécessairement P est de la forme μX^n, $\mu \neq 0$ donc $\lambda = W_n \dfrac{2}{\pi}$.

Réciproquement : Pour $f(x) = x^n$ on a bien $u(f) = \dfrac{2}{\pi} W_n f$.

Alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\dfrac{2}{\pi} W_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ et $E_{\frac{2}{\pi}W_n}(u) = \mathrm{Vect}(x \longmapsto x^n)$.

$\mathrm{Sp}(v) = \{\dfrac{\pi}{2W_n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ et $E_{\frac{\pi}{2W_n}}(v) = \mathrm{Vect}(x \longmapsto x^n)$.

19) A-t-on $\bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} E_{\frac{2}{\pi}W_n}(u) = \mathscr{E}$ ou bien $\mathrm{Vect}(x \longmapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}} = \mathscr{E}$, Non en effet :

La fonction $x \longmapsto \exp x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(x \longmapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ si non ses dérivées vont s'annuler à partir d'un certain rang.

$\mathrm{Sp}(u)$ n'est pas un fermé car la suite $\dfrac{2}{\pi} W_n$ tend vers 0 et 0 n'est pas une valeur propre de u.

$\mathrm{Sp}(v) = \{\dfrac{\pi}{2W_n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est un fermé en effet la suite $(\{\dfrac{\pi}{2W_n})_n$ est strictemnt croissante, soit (x_n) une sous suite de cette suite donc de $\mathrm{Sp}(v)$ qui converge, donc bornée, alors elle doit être stationnaire et sa sa limite est un élément de $\mathrm{Sp}(v)$.

Pour vos remarques ... sadikoulmeki@gmail.com