

Centrale-Supélec 2018 - Filière PC

Corrigé de l'épreuve Mathématiques 2

Damien Broizat
Lycée Jules Ferry, Cannes

I Fonction zêta

Q 1. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$, donc $\mathcal{D}_\zeta =]1; +\infty[$.

Q 2. En posant $g_n(x) = \frac{1}{n^x}$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement sur tout intervalle réel $[a; +\infty[$ avec $a > 1$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq a, |\frac{1}{n^x}| \leq \frac{1}{n^a}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge.

Il y a donc convergence uniforme sur tout intervalle $[a; +\infty[$. Puisque les g_n sont continues sur $[a; +\infty[$, on en déduit que ζ est continue sur $[a; +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, on en conclut que ζ est continue sur $]1; +\infty[$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln(n)}$ est décroissante sur $]1; +\infty[$, donc par somme (infinie), la fonction ζ est décroissante sur $]1; +\infty[$.

Q 4. La fonction ζ est décroissante (d'après **Q 3.**) et minorée par 0 (c'est une limite simple de fonctions positives), donc elle possède une limite réelle positive en $+\infty$.

Q 5. Fixons $x > 1$ et $n \geq 2$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ (qui est bien continue par morceaux...) sur les intervalles $[n; n+1]$ et $[n-1; n]$, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x},$$

ainsi que

$$\int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x} \geq \int_{n-1}^n \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}.$$

Cela donne l'encadrement voulu :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}.$$

Q 6. Fixons un réel $x > 1$ et un entier $N \geq 2$. En sommant les inégalités obtenues en **Q 5.** pour $n = 2 \cdots N$, on obtient :

$$\sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x},$$

c'est-à-dire (par la relation de Chasles)

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x},$$

ou encore

$$\frac{(N+1)^{1-x} - 2^{1-x}}{1-x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \frac{N^{1-x} - 1}{1-x}.$$

En faisant tendre $N \rightarrow +\infty$ et en ajoutant 1, on obtient (puisque $1-x < 0$) :

$$1 - \frac{2^{1-x}}{1-x} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 - \frac{1}{1-x},$$

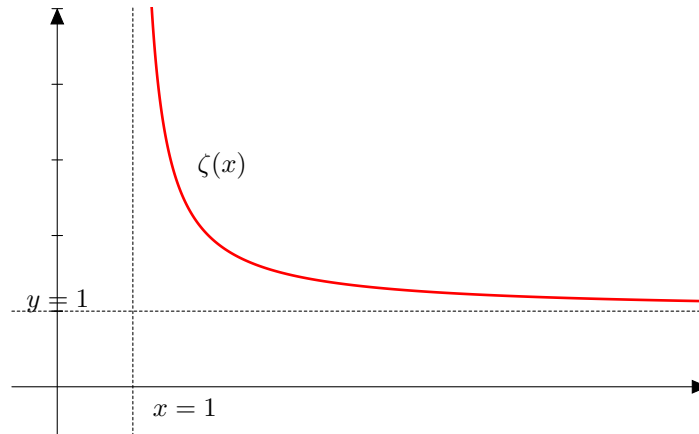
c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Q 7. Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{(x-1)^{2^{x-1}}}\right) = +\infty$, la minoration de $\zeta(x)$ obtenue en **Q 6.** montre que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Q 8. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{(x-1)^{2^{x-1}}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = 1$, l'encadrement obtenu en **Q 6.** montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

Q 9. Courbe représentative de ζ :



II Etude d'une fonction définie par une somme

Q 10. Posons $f_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(n+x)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$, donc puisque $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, on a $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R} \setminus \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$.

Réciproquement, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge, puisque si $x = 0$, $f_n(x) = 0$, et si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{n^2}$.
On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$.

Q 11. On a $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[\cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-k-1; -k[\right)$.

Soit $[a; b]$ un segment inclus dans l'un des intervalles disjoints constituant $\mathcal{D}_f$.

Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}$ étant décroissantes sur $[a; b]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b]$, $f_n(b) \leq f_n(x) \leq f_n(a)$, donc $|f_n(x)| \leq \max\{|f_n(a)|; |f_n(b)|\} \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$.

Or, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge (vu que $|f_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}$ pour $x \neq 0$), donc

la série $\sum_{n \geq 1} (|f_n(a)| + |f_n(b)|)$ converge. Ceci montre que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a; b] \subset \mathcal{D}_f$. Les fonctions f_n étant continues sur $\mathcal{D}_f$, on en déduit que f est continue sur tout segment de $\mathcal{D}_f$, donc sur $\mathcal{D}_f$.

Enfin, les fonctions f_n sont décroissantes sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_f$, donc leur somme (infinie) f est décroissante sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_f$ (**attention, pas sur $\mathcal{D}_f$!**).

Q 12. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a (par télescopage et changements d'indices) :

$$\begin{aligned} f(k) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{N+k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \right) \\ &= - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{N+k} \frac{1}{n} \right) = - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+k} \right). \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+k} \right) = 0$, on en déduit que $f(k) = - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} = - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \right)$.

Q 13. On utilise d'abord une comparaison série-intégrale pour encadrer $f(k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, puis on utilisera la décroissance de f sur $[1; +\infty[$ pour encadrer $f(x)$ pour tout réel $x \geq 1$.

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1; +\infty[$, on a

$$\forall n \geq 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t},$$

donc pour tout entier $k \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^k \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=2}^k \frac{1}{n} \leq \sum_{n=2}^k \int_{n-1}^n \frac{dt}{t},$$

c'est-à-dire

$$\ln(k+1) - \ln(2) \leq \sum_{n=2}^k \frac{1}{n} \leq \ln(k).$$

En ajoutant 1 et en utilisant le résultat de **Q 12.**, on obtient l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad -\ln(k) - 1 \leq f(k) \leq -\ln(k+1) + \ln(2) - 1$$

(il reste trivialement vrai pour $k = 1$).

Soit maintenant un réel $x \geq 1$. En notant k la partie entière de x , on a $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq x \leq k+1$.

La décroissance de f et les encadrements précédents impliquent alors :

$$-\ln(k+1) - 1 \leq f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \leq -\ln(k+1) + \ln(2) - 1,$$

ce qui entraîne (puisque $\ln(x) \leq \ln(k+1) \leq \ln(x+1)$) :

$$-\ln(x+1) - 1 \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(2) - 1,$$

ou encore

$$-\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(2) - 1.$$

En divisant par $\ln(x)$ pour $x > 1$, on obtient :

$$-1 - \frac{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \leq \frac{f(x)}{\ln(x)} \leq -1 + \frac{\ln(2) - 1}{\ln(x)}.$$

Cet encadrement donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln(x)} = -1$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(x)$.

Q 14. Soit $x \in \mathcal{D}_f$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si $x+k$ est un entier strictement négatif p , alors $x = p - k$ aussi, ce qui est contradictoire. Donc $x+k \in \mathcal{D}_f$.

En reprenant la technique de télescopage de la question **Q 12.**, on a

$$\begin{aligned} f(x+k) - f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x+k} - \frac{1}{n} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+x+k} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{N+k} \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+x} \right) \\ &= - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+x} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N+1+x} + \cdots + \frac{1}{N+k+x} \right). \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N+1+x} + \cdots + \frac{1}{N+k+x} \right) = 0$, on en déduit que $f(x+k) - f(x) = - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+x}$.

Q 15. D'après **Q 14.**, on a

$$\forall (x, k) \in \mathcal{D}_f \times \mathbb{N}^*, \quad f(x) = f(x+k) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+k}.$$

Or, par continuité de f en 0, $\lim_{x \rightarrow -k} f(x+k) = f(0) = 0$, et $x \mapsto \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n}$ possède une limite finie lorsque $x \rightarrow -k$. Puisque $\frac{1}{x+k}$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \rightarrow -k$, on en déduit que

$$f(x+k) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n} = o\left(\frac{1}{x+k}\right), \text{ et donc } f(x) \underset{x \rightarrow -k}{\sim} \frac{1}{x+k}.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow -k^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -k^-} f(x) = -\infty$.

Q 16. Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} \zeta(k+1) = 1$ (d'après **Q 8.**), on a $|(-1)^k \zeta(k+1)x^k| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^k$ donc, tout comme la série géométrique $\sum_{k \geq 1} |x|^k$, la série entière $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \zeta(k+1)x^k$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$. Son rayon de convergence est donc égal à $R = 1$.
En $x = \pm 1$, il y a divergence grossière de la série entière, puisque le module du terme général tend vers 1.

Q 17. Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{p \in \mathbb{Z}, p < 0\}$, avec

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{D}_f, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} (x+n)^{-1} = (-1) \cdots (-k)(x+n)^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}.$$

On sait déjà (cf. **Q 11.**) que $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.

Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$, il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment $[a; b] \subset \mathcal{D}_f$. C'est le cas puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b], \forall n > -a, \quad |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{|x+n|^{k+1}} = \frac{k!}{(x+n)^{k+1}} \leq \frac{k!}{(n+a)^{k+1}},$$

(dans ces conditions, $x+n \geq a+n > 0$) et la série $\sum_{n > -a} \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ converge (car $k+1 \geq 2$).

Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions nous donne alors :

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{D}_f, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}.$$

Q 18. Fixons $x \in]-1; 1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n+x \geq 1+x > 0$, donc d'après l'expression de $f^{(k)}$ obtenue en **Q 17.** :

$$|f^{(k)}(x)| = k! \left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}} \right) \leq k! \left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{k+1}} \right),$$

c'est-à-dire

$$|f^{(k)}(x)| \leq k! \left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \zeta(k+1) \right) \leq k! \left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \zeta(2) \right)$$

(par décroissance de ζ), d'où la majoration voulue avec $A = \zeta(2)$.

Q 19. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à la fonction f :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

$$\text{avec } R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Puisque $f(0) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(0) = (-1)^k k! \zeta(k+1)$ (d'après **Q 17.**), on a

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \zeta(k+1) x^k + R_n(x),$$

donc il suffit de montrer que $\forall x \in]-1; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ pour établir que f est développable en série entière sur $] -1; 1[$. Pour cela, majorons $R_n(x)$ à l'aide de **Q 18.** :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x-t|^n |f^{(n+1)}(t)| dt \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x-t|^n (n+1)! \left(A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}} \right) dt \right|,$$

c'est-à-dire

$$|R_n(x)| \leq (n+1) \left| \int_0^x |x-t|^n \left(A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}} \right) dt \right|.$$

Procédons en fonction du signe de x :

- Si $0 \leq x < 1$, alors

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq (n+1) \int_0^x (x-t)^n \underbrace{\left(A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}}\right)}_{\leq A+1} dt \\ &\leq (A+1)(n+1) \int_0^x (x-t)^n dt = (A+1)x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

- Si $-1 < x < 0$, alors

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq (n+1) \int_x^0 (t-x)^n \left(A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}}\right) dt \\ &= (n+1) \left(A \int_x^0 (t-x)^n dt + \int_x^0 \left(\frac{t-x}{t+1}\right)^n \times \frac{dt}{(1+t)^2} \right) \\ &= A(-x)^{n+1} + (n+1) \int_x^0 \left(1 - \frac{1+x}{1+t}\right)^n \times \frac{dt}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

Vu que la fonction $t \mapsto 1 - \frac{1+x}{1+t}$ est croissante et positive sur l'intervalle $[x; 0]$, on a

$$\forall t \in [x; 0], \quad \left(1 - \frac{1+x}{1+t}\right)^n \leq (-x)^n,$$

et donc

$$|R_n(x)| \leq A(-x)^{n+1} + (n+1)(-x)^n \int_x^0 \frac{dt}{(1+t)^2} = (-x)^{n+1} \left(A + \frac{n+1}{1+x}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(par croissances comparées).

Dans tous les cas, on a donc $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui amène :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k \zeta(k+1) x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k.$$

Q 20. Pour tout réel x , la fonction $t \mapsto \frac{t^x-1}{1-t}$ est continue sur $]0; 1[$.

L'intégrale proposée est faussement impropre en 1, car en posant $u = 1 - t$, on a

$$\frac{t^x-1}{1-t} = \frac{(1-u)^x-1}{u} = \frac{1-xu+o(u)-1}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} -x,$$

donc la fonction se prolonge continûment en 1.

En outre, $\frac{t^x-1}{1-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x - 1$, et l'intégrale $\int_0^1 t^x dt$ converge si et seulement si $x > -1$, donc

l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t} dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

Q 21. Fixons $x > -1$. Puisque $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ pour tout $t \in [0; 1[$, on a

$$\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t} dt = \int_0^1 (t^x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t) dt,$$

en posant $h_n(t) = (t^x-1)t^n$. On applique alors le théorème d'intégration terme à terme à la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$: chaque h_n est continue (par morceaux) sur $]0; 1[$, de signe constant (opposé à celui de x), intégrable car $|h_n(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^\alpha$ avec $\alpha = \min(n, n+x) > -1$, et on a

$$\int_0^1 |h_n(t)| dt = \pm \int_0^1 h_n(t) dt = \left| \int_0^1 (t^{n+x} - t^n) dt \right| = \left| \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{|x|}{(n+x+1)(n+1)}.$$

De plus, la série $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge simplement sur $]0; 1[$ vers la fonction continue $t \mapsto \frac{t^x - 1}{1 - t}$, et enfin, la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |h_n(t)| dt$ converge, puisque $\int_0^1 |h_n(t)| dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}$ pour $x \neq 0$.
Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 h_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n+1} \right) = f(x).$$

Q 22. Le résultat établi en **Q 19.** montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^k \zeta(k+1) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Pour exprimer $f^{(k)}(0)$ sous forme intégrale, appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégral (version $\mathcal{C}^\infty$) à l'expression de f obtenue en **Q 21.**. On a

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x) dt,$$

où la fonction $\varphi : (t, x) \mapsto \frac{t^x - 1}{1 - t}$ vérifie les propriétés suivantes :

- φ est définie sur $]0; 1[\times]-1; +\infty[$;
- pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto \varphi(t, x)$ est intégrable sur $]0; 1[$ (c'est une conséquence du théorème d'intégration terme à terme appliqué en **Q 21.**) ;
- pour tout $t \in]0; 1[$, la fonction $x \mapsto \varphi(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; +\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) = \frac{\ln^k(t) t^x}{1 - t};$$

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons une majoration uniforme locale de $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}$:

$$\forall a > -1, \forall (t, x) \in]0; 1[\times [a; +\infty[, \quad \left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \right| \leq \frac{t^a |\ln(t)|^k}{1 - t},$$

et la fonction $\psi_{k,a} : t \mapsto \frac{t^a |\ln(t)|^k}{1 - t}$ est continue et intégrable sur $]0; 1[$, puisque :

- au voisinage de 0, $\psi_{k,a}(t) \underset{0+}{\sim} t^a |\ln(t)|^k = o_{0+}(t^\beta)$, pour tout $\beta \in]-1; a[$, donc $\psi_{k,a}$ est intégrable en 0 ;
- au voisinage de 1, $\psi_{k,a}(t) \underset{1-}{\sim} \frac{|\ln(t)|^k}{1-t} \underset{1-}{\sim} \frac{|t-1|^k}{1-t} = (1-t)^{k-1}$, donc $\psi_{k,a}$ se prolonge continûment en 1 (puisque $k-1 \geq 0$), ce qui montre son intégrabilité en 1.

D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; +\infty[$, et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1; +\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) dt = \int_0^1 \frac{\ln^k(t) t^x}{1 - t} dt.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient donc l'expression intégrale :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(k+1) = \frac{f^{(k)}(0)}{(-1)^k k!} = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 \frac{\ln^k(t)}{1 - t} dt.$$

Q 23. Dans l'intégrale précédemment obtenue, on utilise le changement de variable $u \mapsto e^{-u}$, qui est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0; +\infty[$ dans $]0; 1[$: en posant $t = e^{-u}$, on a $dt = -e^{-u} du$, donc

$$\int_0^1 \frac{\ln^k(t)}{1 - t} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{(-u)^k}{1 - e^{-u}} (-e^{-u}) du = (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{e^u - 1} du.$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(k+1) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{e^u - 1} du.$$

III Probabilités

Q 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{\zeta(x)n^x} \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{\zeta(x)}{\zeta(x)} = 1$, donc on définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 25. La variable aléatoire X précédemment définie admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, |n\mathbb{P}(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-1}}$, cette convergence absolue a lieu si et seulement si $x - 1 > 1$, c'est-à-dire $x > 2$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}.$$

Q 26. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire X^k possède une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} n^k \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, |n^k \mathbb{P}(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-k}}$, cette convergence absolue a lieu si et seulement si $x - k > 1$, c'est-à-dire $x > k + 1$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}} = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}.$$

Q 27. Lorsque $x > 3$, la variable X^2 admet une espérance finie (d'après **Q 26.**), donc X possède une variance finie, qui vaut d'après la formule de Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\zeta(x-2)}{\zeta(x)} - \left(\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} \right)^2 = \frac{\zeta(x)\zeta(x-2) - \zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}.$$

Q 28. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(X \in a\mathbb{N}^*)$ se décompose en réunion dénombrable disjointe :

$$(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = an),$$

donc par σ -additivité, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = an) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)(an)^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \zeta(x) = \frac{1}{a^x}.$$

Q 29. Soit I une quelconque partie non vide de l'ensemble d'indices $\{1, \dots, n\}$.

L'événement $\bigcap_{i \in I} (X \in q_i \mathbb{N}^*)$ est réalisé si et seulement si q_i divise X pour tout $i \in I$. Les q_i ($i \in I$) étant des nombres premiers distincts, cela équivaut à $\prod_{i \in I} q_i$ divise X . Donc

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} (X \in q_i \mathbb{N}^*) \right) = \mathbb{P} \left(X \in \left(\prod_{i \in I} q_i \right) \mathbb{N}^* \right).$$

D'après **Q 28.**, on sait calculer cette probabilité :

$$\mathbb{P} \left(X \in \left(\prod_{i \in I} q_i \right) \mathbb{N}^* \right) = \frac{1}{\left(\prod_{i \in I} q_i \right)^x} = \prod_{i \in I} \frac{1}{q_i^x} = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X \in q_i \mathbb{N}^*).$$

On a donc $\mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} (X \in q_i \mathbb{N}^*) \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X \in q_i \mathbb{N}^*)$ pour toute partie non vide $I \subset \{1, \dots, n\}$, ce qui prouve l'indépendance mutuelle des événements $(X \in q_k \mathbb{N}^*)_{1 \leq k \leq n}$.

Q 30. La suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_{n+1} = B_n \cap (X \notin p_{n+1}\mathbb{N}^*) \subset B_n.$$

D'après le théorème de continuité décroissante d'une probabilité, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k \mathbb{N}^*)\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*)\right).$$

De plus, l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*)$ est réalisé si et seulement si X n'est multiple d'aucun nombre premier, c'est-à-dire si et seulement si $X = 1$ (d'après les rappels d'arithmétique, tous les entiers $a \geq 2$ sont multiples d'au moins un nombre premier).

D'où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}(X = 1)$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$.

Ensuite, on peut calculer explicitement $\mathbb{P}(B_n)$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'indépendance mutuelle des événements $(X \in p_k \mathbb{N}^*)_{1 \leq k \leq n}$ établie en **Q 29.** implique l'indépendance mutuelle de leurs complémentaires $(X \notin p_k \mathbb{N}^*)_{1 \leq k \leq n}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k \mathbb{N}^*)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X \notin p_k \mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X \in p_k \mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

Finalement, l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$ se réécrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{\zeta(x)1^x} = \frac{1}{\zeta(x)},$$

ce qui est l'égalité voulue.

Q 31. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $D_k = (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k \mathbb{N}^*)$ est réalisé si et seulement si X ou Y n'est pas multiple du nombre premier p_k , c'est-à-dire si p_k ne divise pas X et Y simultanément. On en déduit $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k$, donc aussi

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=1}^n D_k\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

La suite $(C_n)_{n \geq 1}$ étant décroissante pour l'inclusion (tout comme dans la question précédente), on obtient par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n).$$

Calculons maintenant $\mathbb{P}(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements $(D_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont mutuellement indépendants car leurs complémentaires le sont. En effet, $\overline{D_k} = (X \in p_k \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k \mathbb{N}^*)$, donc pour toute partie $I \subset \{1, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \overline{D_i}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (X \in p_i \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_i \mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}\left(\left(X \in \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^*\right) \cap \left(Y \in \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^*\right)\right),$$

donc par indépendance des variables X et Y :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \overline{D_i}\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^*\right) \times \mathbb{P}\left(Y \in \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^*\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (X \in p_i \mathbb{N}^*)\right) \times \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (Y \in p_i \mathbb{N}^*)\right),$$

et en utilisant **Q 29.**, on déduit alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \overline{D_i}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X \in p_i \mathbb{N}^*) \times \prod_{i \in I} \mathbb{P}(Y \in p_i \mathbb{N}^*) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}((X \in p_i \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_i \mathbb{N}^*)) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(\overline{D_i}).$$

Cette indépendance mutuelle des $(D_k)_{1 \leq k \leq n}$ entraîne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(C_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(D_k) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(\overline{D_k})) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(X \in p_k \mathbb{N}^*) \mathbb{P}(Y \in p_k \mathbb{N}^*)).$$

Mais X et Y suivent la même loi zêta de paramètre x , donc d'après **Q 28.** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(C_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{1}{p_k^x}\right)^2\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right).$$

On conclut en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ et en utilisant **Q 30.** avec $2x$ à la place de x :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

Q 32. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(W_n \in k\mathbb{N}^*)$ est réalisé si et seulement si k divise le pgcd de U_n et V_n , c'est-à-dire k divise simultanément U_n et V_n . On a donc

$$(W_n \in k\mathbb{N}^*) = (U_n \in k\mathbb{N}^*) \cap (V_n \in k\mathbb{N}^*),$$

ce qui amène par indépendance des variables U_n et V_n :

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*) \times \mathbb{P}(V_n \in k\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2,$$

vu que U_n et V_n suivent la même loi. Enfin, U_n suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, donc

$$\mathbb{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*) = \frac{\#(k\mathbb{N}^* \cap \{1, \dots, n\})}{n}.$$

Puisque les éléments de $k\mathbb{N}^* \cap \{1, \dots, n\}$ sont les kq avec $1 \leq q \leq \frac{n}{k}$ et q entier, on en déduit que $\#(k\mathbb{N}^* \cap \{1, \dots, n\}) = \lfloor n/k \rfloor$, et donc

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

Q 33. Fixons un réel $\varepsilon > 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}^*$, donc la série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(W_n = k)$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) = 1$ (en fait $\mathbb{P}(W_n = k) = 0$ dès que $k > n$). On a donc évidemment

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) = 1.$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^m \ell_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) \leq 1.$$

- Pour établir que $\sum_{k=1}^m \ell_k \geq 1 - \varepsilon$ à partir d'un certain rang M , on utilise une majoration uniforme en n du reste de la série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(W_n = k)$. Puisque

$$\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(W_n = k) \leq \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{k^2},$$

on en déduit :

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = R_m$$

(puisque $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, le reste R_m est bien défini et on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} R_m = 0$), et donc

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) = 1 - \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - R_m.$$

On considère alors un entier $M \geq 1$ tel que $\forall m \geq M, 0 \leq R_m \leq \varepsilon$. Dès lors :

$$\forall m \geq M, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - \varepsilon.$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient enfin

$$\forall m \geq M, \quad \sum_{k=1}^m \ell_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - \varepsilon.$$

Finalement, on a bien l'existence d'un entier M tel que $\forall m \geq M, \sum_{k=1}^m \ell_k \in [1 - \varepsilon; 1]$.

Q 34. La question précédente montre que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \ell_k = 1$. Donc la série à termes positifs $\sum_{k \geq 1} \ell_k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k = 1$. La suite $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit donc bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

Q 35. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2}$ (cela se montre facilement à partir de l'encadrement $\frac{n}{k} - 1 < \lfloor n/k \rfloor \leq \frac{n}{k}$). D'après **Q 28.**, on a donc

$$\mathbb{P}(W \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{k^2} = \mathbb{P}(X \in k\mathbb{N}^*),$$

où X est n'importe quelle variable aléatoire suivant la loi zêta de paramètre $x = 2$. Ceci montre (en vertu du résultat admis) que W suit elle-même une loi zêta de paramètre $x = 2$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(W = k) = \frac{1}{\zeta(2)k^2}.$$

En considérant l'événement $(W = 1)$, on a la relation $\mathbb{P}(W = 1) = \frac{1}{\zeta(2)}$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n \wedge V_n = 1) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Interprétation : si on choisit indépendamment deux nombres au hasard entre 1 et n , la probabilité que ces deux nombres soient "premiers entre eux" (i.e. sans diviseur commun autre que 1) tend vers $\frac{6}{\pi^2} \simeq 0,61$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.