OPTIONS M, P' ET TA - EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 2 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M, P' et TA, comporte 2 pages

-----

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (Ox,Oy).

On appelle (C) la courbe d'équation :

$$y = \operatorname{ch} x$$

et (Γ) la courbe d'équation :

$$y = -\operatorname{sh} x.$$

L'objet du problème est de déterminer la ou les tangentes communes à (C) et (Γ).

1°) Soit M_α le point de (Γ) d'abscisse α, (T_α) la tangente à (Γ) en M_α.

Ecrire l'équation de (T_α). Soit :

$$y = u_\alpha(x)$$

cette équation. Expliciter $u_\alpha(x)$.

2°) <u>On suppose dans cette question $\alpha \leqslant 0$.</u>

Montrer les inégalités :

$$u_\alpha(x) \leqslant -\operatorname{sh} x < \operatorname{ch} x \quad \text{si} \quad x \leqslant 0 \quad ,$$

$$u_\alpha(x) \leqslant 0 < \operatorname{ch} x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 \quad .$$

En déduire que si $\alpha \leqslant 0$, (T_α) et (C) n'ont aucun point commun.

3°) <u>On suppose dans tout ce qui suit que $\alpha > 0$.</u>

On pose :

$$\phi_\alpha(x) = \operatorname{ch} x - u_\alpha(x).$$

Etudier les variations de $\phi_\alpha(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$ et calculer en fonction de α :

$$m(\alpha) = \operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}} \phi_\alpha(x) .$$

Vérifier qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (T_α) soit tangente à (C) est que :

$$m(\alpha) = 0 .$$

4°) Soit l'équation :

(E) $\qquad m(\alpha) = 0$

Que devient (E) si on fait le changement d'inconnue défini par :

$$\operatorname{ch}\alpha = t \ ?$$

Vérifier que l'équation en t, (E'), s'écrit :

(E') $\qquad \operatorname{Arg\,sh} t + \operatorname{Arg\,ch} t - g(t) = 0$

où g(t) s'exprime très simplement au moyen de radicaux carrés. Expliciter g(t).

.../...

5°) Posons, pour $t \in [1,+\infty[$:

$$f(t) = \operatorname{Arg\,sh} t + \operatorname{Arg\,ch} t - g(t).$$

Etudier les variations de $f(t)$. En déduire que (E') admet une racine unique, notée t_0.

6°) Montrer que t_0 est compris entre 1,34 et 1,35.
En appliquant la méthode des parties proportionnelles à l'intervalle [1,34 , 1,35] et la méthode de Newton à la borne 1,34, trouver un meilleur encadrement du nombre t_0.

Dans toute la suite, on remplace t_0 par la valeur décimale approchée à 10^{-4} près par défaut de ce nombre.

7°) Calculer, avec la précision permise par le calcul précédent, une valeur décimale approchée de :

$$\alpha_0 = \operatorname{Arg\,ch} t_0 ,$$

et de : $$\gamma_0 = \operatorname{sh} \alpha_0 .$$

8°) La droite (T_{α_0}) est tangente à (C) en un point de coordonnées (β_0,δ_0). Calculer, avec la précision permise par les calculs précédents, des valeurs décimales approchées de β_0 et de δ_0.

9°) (T_{α_0}) coupe Ox au point de coordonnées $(\eta_0,0)$ et Oy au point de coordonnées $(0,v_0)$.
Calculer, avec la précision permise par les calculs précédents, des valeurs décimales approchées de η_0 et de v_0 .
