

# Corrigé du Concours Communs polytechniques Épreuve de mathématiques I-Session 2010

Omar SADIK

17 mai 2010

## Exercice I

1. Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , et  $\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = y^2 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ .  
Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

2. Toutes les normes sont équivalentes dans  $\mathbb{R}^2$ , choisissons  $\|(x, y)\|_\infty = \sup(|x|, |y|) = h$ , comme norme dans  $\mathbb{R}^2$ , on a :  $f(x, y) - f(0, 0) = o(\|(x, y)\|_\infty)$  au voisinage de  $(0, 0)$ , en effet  $|y^4| \leq \|(x, y)\|_\infty^4$  et  $|x^2 + y^2| \geq \|(x, y)\|_\infty^2$ , donc  $f(x, y) \leq \|(x, y)\|_\infty^2$ . ce qui donne la différentiabilité de  $f$  en  $(0, 0)$ , de plus  $df_{(0,0)} =$  l'application linéaire nulle.

## Exercice II

1.  $A$  est une partie compacte de  $E$  ssi de toute suite d'éléments de  $A$  on peut extraire une suite convergente.
2. soit  $(y_n) \in f(A)$ , il existe  $x_n \in A$  tq  $y_n = f(x_n)$ , la partie  $A$  est compacte, il existe une sous suite  $(x_{\varphi(n)})$  de  $(x_n)$  qui converge vers un élément  $a \in A$ ,  $f$  est continue donne  $(y_{\varphi(n)}) = (f(x_{\varphi(n)}))$  converge vers  $f(a) \in f(A)$   
 $f(A)$  est donc compacte.

L'image réciproque d'un compacte n'est pas nécessairement un compacte, il suffit de prendre :  
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1, f^{-1}\{1\} = \mathbb{R}$  qui n'est pas compacte, et  $\{1\}$  est un compacte.

## Problème

### Partie préliminaire

1. a/ l'application  $u : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est bien définie et continue sur  $]0, \pi]$  et prolongeable par continuité en  $0$ , donc intégrable sur  $]0, \pi]$ .

b/ le DSE de  $\sin$  en  $0$  est :  $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et  $u(t) =$

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \text{ pour } t \in ]0, \pi] \text{ égalité encore vraie pour } t = 0, \text{ cette}$$

série a un rayon de convergence  $\infty$ , si  $U$  est la primitive de  $u$  qui s'annule en  $0$ , alors, pour tout  $x \in ]0, \pi] : U(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$ . Donc

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}, \text{ on prend } u_k = \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$$

2. a/ La série  $\sum \frac{\pi^n}{n!}$  converge (D'ALEMBET), par conséquent son terme général converge vers  $0$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 - \frac{\pi^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+1)!} \cdot \frac{n \cdot n!}{\pi^n} = 1 - \frac{n\pi}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + (2-\pi)n + 1}{(n+1)^2} \geq \frac{n^2 - 2n + 1}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \geq 0, \text{ et } u_n > 0, \text{ donc } \left(\frac{\pi^n}{n \cdot n!}\right) \text{ est décroissante.}$$

b/ De la question a/ il s'ensuit que la suite  $(u_n)$  est décroissante vers 0 ( car  $u_n \leq \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$  ) et elle est positive, donc la série  $\sum (-1)^k u_k$  est alternée, ainsi  $|R_n| \leq u_{n+1}$ .

$$\left| \frac{2}{\pi} I - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k \right| = \frac{2}{\pi} |R_n| \text{ et } \frac{2}{\pi} |R_n| = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!} \leq 10^{-2} \text{ si } n \geq 4, \text{ et } \frac{2}{\pi} I \simeq \sum_{k=0}^4 (-1)^k u_k \simeq 1,18 \text{ à } 10^{-2}.$$

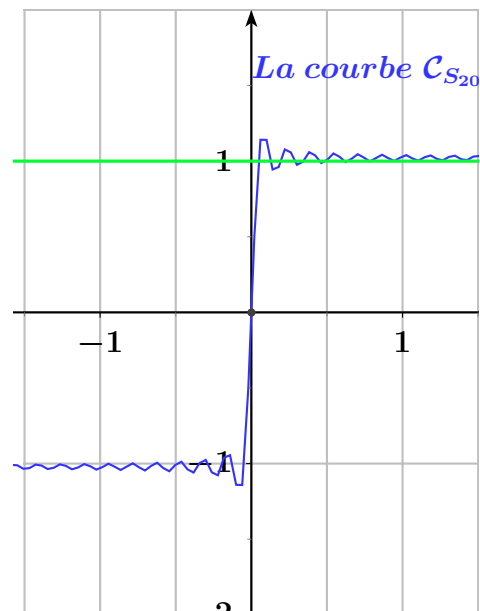
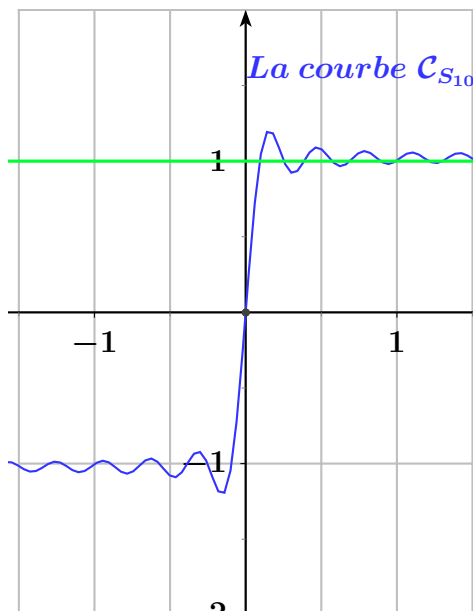
**Première partie : Phénomène de Gibbs.**

3. Les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  sont :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n}$ . La fonction  $f$  est  $\mathcal{CM}$ -  $2\pi$  périodique, et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de DIRECHLET conclut que sa série de fourier converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et a pour somme la régularisée  $\tilde{f}$  de  $f$  qu'on vérifie simplement qu'elle est égale à  $f$  : càd

$$\left( \sum_{k=0}^{n-1} b_{2k+1} \sin[(2k+1)t] \right)_n = \left( \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin[(2k+1)t]}{(2k+1)} \right)_n$$

converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Cette convergence n'est pas uniforme car la suite  $(S_n)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et  $f$  ne l'est pas sur  $\mathbb{R}$ .

4.



5. a/ Soit  $k \in \mathbb{N} : \sin t \sin([(2k+1)t]) = \frac{1}{2} \cos(2kt) - \cos(2k+2)t$ ; et on voit bien que  $\sin t \cdot T_n(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2nt) = \sin^2 nt$ . Donc si  $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , alors  $\sin t \neq 0$ , le résultat en découle.

b/  $0 \leq T_n(t) \leq \frac{1}{\sin a} = M, \forall t \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$c/ S_{n+p}(t) - S_n(t) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin([(2k+1)t])}{(2k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_{k+1}(t) - T_k(t)}{(2k+1)} = \sum_{k=n+2}^{n+p+1} \frac{T_k(t)}{(2k-1)}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_k(t)}{(2k+1)} = \frac{T_{n+1}(t)}{2n+3} + \frac{T_{n+p+1}(t)}{2(n+p)+1} + \sum_{k=n+2}^{n+p} T_k(t) \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

Ainsi :

$$|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leq M \left( \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2(n+p)+1} + \sum_{k=n+2}^{n+p} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \right) \leq$$

$\frac{2M}{2n+3}$ , cette inégalité est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et en faisant tendre  $p$  vers  $\infty$  et puisque  $(S_n)$  cv simplement vers  $f$ , alors :

$$\forall t \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}^* : |f(t) - S_n(t)| \leq \frac{2M}{2n+3}.$$

La suite  $\left( \omega_n = \frac{2M}{2n+3} \right)$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , donc  $\sup_{t \in [a, b]} |f(t) - S_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , ce qui montre que la série de FOURIER de  $f$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

6. a/ Soit  $t \in ]0, \pi/2[$ .  $S'_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos [(2k+1)t] = \frac{4}{\pi} \Re \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)t} = \frac{4}{\pi} \Re \left( \frac{\sin nt}{\sin t} e^{int} \right)$   
 $= \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin nt \cos nt}{\sin t} \right) = \frac{2 \sin 2nt}{\pi \sin t}$  et donc

$S'_n(t) = 0 \iff \sin 2nt = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : t = \frac{k\pi}{2n}$  : La plus petite valeur qui annule  $S'_n$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  est donc  $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$ .

b/ On a  $S_n(x) - S_n(0) = S_n(x) = \int_0^x S'_n(t) dt$ , si on considère l'application  $d_n : t \rightarrow \frac{2 \sin 2nt}{\pi \sin t}$  si  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $d_n(0) = \frac{4n}{\pi}$ , alors  $d_n$  est continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  de plus  $S'_n = d_n$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , ainsi  $S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$  et  $S_n(\alpha_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}} du$  à l'aide du changement de variables  $t = \frac{u}{2n}$

c/ Considérons la suite d'applications  $\mathcal{CM} (f_n)$  définie par  $f_n : u \rightarrow \frac{1 \sin u}{n\pi \sin \frac{u}{2n}}$  sur  $]0, \pi[$ , on a  $(f_n)$  cv simplement vers l'application  $u \rightarrow \frac{2 \sin u}{\pi u} \mathcal{CM}$  sur  $]0, \pi[$ , de plus  $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall u \in ]0, \pi[ : |f_n(u)| \leq \frac{\sin u}{u}$  et  $u \rightarrow \frac{\sin u}{u}$  est  $\mathcal{CM}$  et intégrable sur  $]0, \pi[$ , d'après le théorème de convergence dominée on en déduit que  $(S_n(\alpha_n))$  cv et sa limite est  $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du = \frac{2}{\pi} I$ .

d/  $\sup_{x \in ]0, \frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)| \geq |S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{\pi} I - 1 \right| \neq 0$ .

Donc  $\left( \sup_{x \in ]0, \frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)| \right)$  ne converge pas vers 0.

Deuxième partie : Démonstration du théorème de convergence normale.

7. La formule de PARSEVAL d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mathcal{CM} 2\pi$  périodique est  $|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ .

Si de plus  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $[0, 2\pi]$  et si  $c_n(f) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ , alors  $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0$ , ce qui donne  $f =$  nulle sur  $[0, 2\pi]$  et par conséquent sur  $\mathbb{R}$  de la périodicité de  $f$ .

Soit  $f = 0$  sur  $]0, 2\pi[$  et  $f(0) = f(2\pi) = 1$  et  $f$   $2\pi$ -périodique, alors  $c_n(f) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $f$  n'est pas l'application nulle.

- 8.** a/  $g$  est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , par conséquent  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

La convergence de la dernière série est uniforme sur  $[0, 2\pi]$ , donc on peut intégrer terme à terme, ainsi

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = \frac{c_0(f)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+p)t} dt + c_p(f) \int_0^{2\pi} e^{-i(n-p)t} dt. \text{ On a } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+p)t} dt = \delta_{n,-p}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-p)t} dt = \delta_{n,p} \text{ et } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt = \delta_{n,0}$$

D'où  $c_n(g) = c_n(f)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

- b/ Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $c_n(g) = c_n(f)$ , alors  $c_n(g - f) = 0$ , la fonction  $g - f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , de la question 8) on en déduit que  $f = g$  sur  $\mathbb{R}$ .

- 9.** a/ Une intégration par parties donne  $c_n(f') = inc_n(f)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

- b/ On a  $\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |u_n(f)(t)| &\leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| \\ &\leq \frac{1}{n}|c_n(f')| + \frac{1}{n}|c_{-n}(f')| \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{n^2} + |c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} (|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2) \end{aligned}$$

- c/ La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente, l'inégalité de BESSEL appliquée à  $f'$  montre que  $\forall p \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=-p}^p |c_n(f')|^2 \leq \|f'\|_2^2$ , la série  $\sum_{n \geq 1} u_n(f)$  cv normalement, donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ , et de la question 9) la série en question converge vers  $f$ .

- d/ Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique, continue, et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , alors la série de FOURIER de  $f$  cv normalement sur  $\mathbb{R}$  et a pour somme  $f$ .

Évidemment Le phénomène de GIBBS ne peut pas se produire pour cette fonction.