

Concours Centrale-Supélec TSI 2012 - Maths 2

Partie I : un premier exemple

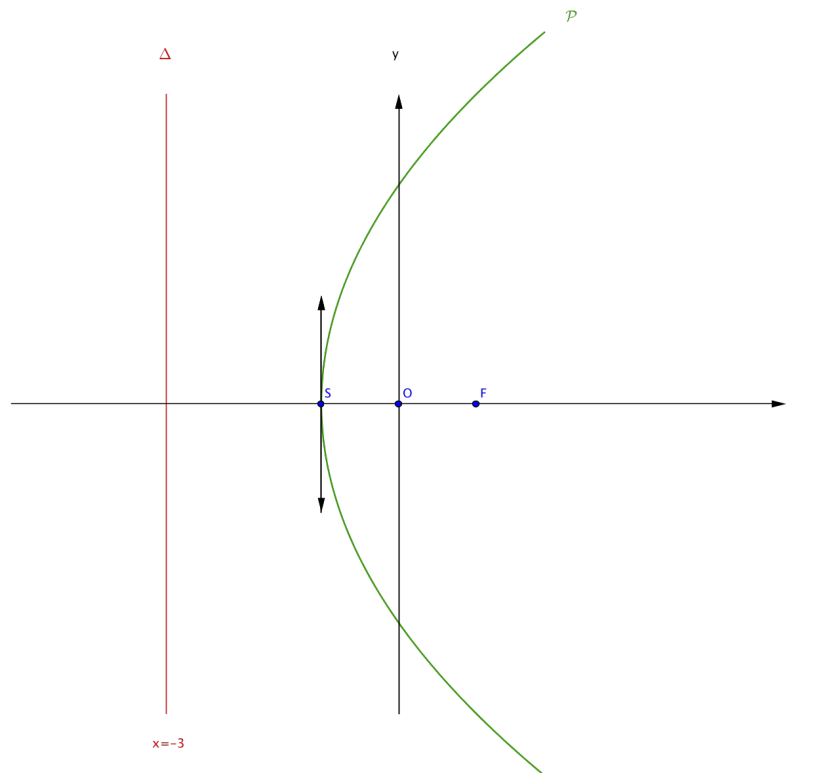
A. 1) On a $\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $d(P, F)^2 = \|\overrightarrow{FP}\|^2 = (x-1)^2 + y^2$

Δ a pour équation cartésienne $x+3=0$ donc $d(P, \Delta)^2 = (x+3)^2$

2) $P \in \mathcal{P} \iff (x-1)^2 + y^2 = (x+3)^2 \iff y^2 = 8(x+1)$. Donc $\mathcal{P} : y^2 = 8(x+1), z=0$

3) \mathcal{P} est une parabole de sommet S et de foyer F

En effet, quitte à changer de repère en posant $x' = x+1$, on a une équation de la forme $y^2 = 2px'$. Le sommet a pour coordonnées dans le nouveau repère $(0,0)$ c'est-à-dire $(-1,0)$ dans l'ancien repère. Le foyer a pour coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$ donc $(1,0)$ dans l'ancien repère.



Représentation de la parabole \mathcal{P}

4) En posant $t = \frac{y}{4}$, on trouve le paramétrage proposé.

B. 1) On trouve de même $z^2 = 8(1-x)$ et $y=0$

La courbe \mathcal{R} est donc une parabole contenue dans le plan Oxz .

Pour $x=1$, on trouve $y=z=0$ donc $F \in \mathcal{R}$

2) \mathcal{P} a pour équations $y^2 = 8(x+1)$ et $z=0$. En posant $x' = -x, y' = z$ et $z' = y$, on a $z'^2 = 8(1-x')$ et $y' = 0$ et on retrouve les équations de \mathcal{R} .

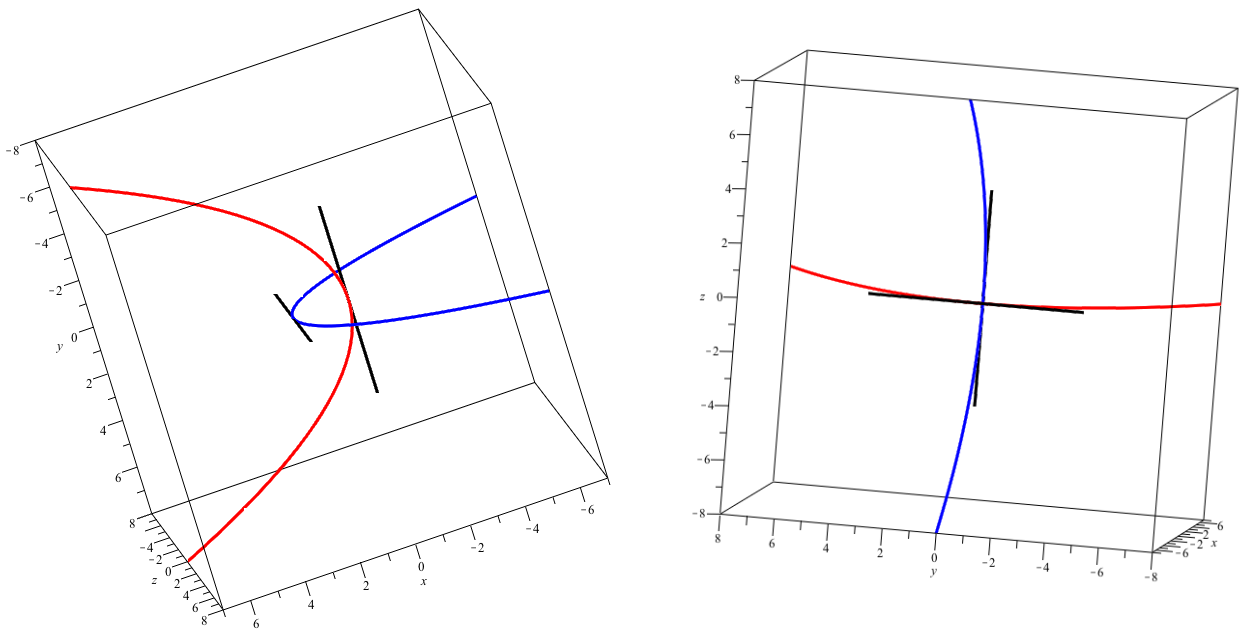
Identifions la transformation associée :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que M est une matrice orthogonale et symétrique.

C'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale. Or $E_1 = \text{Vect}((0, 1, 1))$, il s'agit donc de la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (0, 1, 1)$.

3) Deux vues permettant de mettre en évidence l'illusion d'optique dans ce cas particulier :



C. 1) La tangente à \mathcal{P} en P est dirigée par le vecteur non nul $\vec{p} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Celle de \mathcal{R} en R est dirigée par le vecteur non nul $\vec{r} = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \\ z'(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4u \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2) On a $\vec{PR} = \begin{pmatrix} 2(1 - u^2 - t^2) \\ -4t \\ 4u \end{pmatrix}$ et donc :

$$\vec{p}_1 = \vec{p} \wedge \vec{PR} = \begin{pmatrix} 16u \\ -16ut \\ 8(u^2 - t^2 - 1) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{r}_1 = \vec{r} \wedge \vec{PR} = \begin{pmatrix} 16t \\ 8(u^2 - t^2 + 1) \\ 16ut \end{pmatrix}$$

3) Ces produits vectoriels sont toujours non nuls.

Montrons dans le cas de \vec{p}_1 , le cas \vec{r}_1 étant analogue. Si \vec{p}_1 était nul, u le serait également et la troisième composante $-8(t^2 + 1)$ serait nulle, absurde !

D. Vérifions que les courbes font illusion :

- Tous les points de \mathcal{P} et \mathcal{R} sont distincts (le vecteur \overrightarrow{PR} est non nul).
- Le vecteur \overrightarrow{PR} n'est colinéaire ni à \vec{p} , ni à \vec{r} (\vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont non nuls).
- \vec{p}_1 et \vec{r}_1 sont orthogonaux car leur produit scalaire est nul (simple calcul).

E. 1) $M \notin [PR]$ si et seulement si $\mu > 1$ ou $\mu < 0$.

$$2) \text{ On a } \overrightarrow{PM} = \mu \overrightarrow{PR} \text{ donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2(1-u^2-t^2) \\ -4t \\ 4u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 4t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu(1-u^2-t^2)+2t^2-1 \\ 4(1-\mu)t \\ 4\mu u \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } \mu \neq 0 \text{ et } \mu \neq 1, \text{ on a } \boxed{t = \frac{y}{4(1-\mu)} \text{ et } u = \frac{z}{4\mu}}$$

3) y et z étant fixés, on a :

$$\begin{aligned} x &= 2\mu(1-u^2-t^2) + 2t^2 - 1 = 2\mu - 1 - 2\mu u^2 + 2(1-\mu)t^2 \\ &= 2\mu - 1 - \frac{z^2}{8\mu} + \frac{y^2}{8(1-\mu)} \end{aligned}$$

4) Les points de l'axe Ox ont pour coordonnées $(x, 0, 0)$. On a donc $x = 2\mu - 1$ avec $\mu > 1$ ou $\mu < 0$. Ainsi, $\boxed{x < -1 \text{ ou } x > 1}$

Partie II : coplanarité et alignement

A. 1) Supposons qu' $(0, 0, 0, h) \in \text{Ker}(f)$. On a alors :

$$L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} h \\ h \\ h \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff h = 0$$

Donc le seul vecteur appartenant au noyau de f qui a ses trois premières composantes nulles est le vecteur nul.

2) C'est du cours.

$$3) (u, v, w, h) \in \text{Ker}(f) \iff LV = 0 \iff \begin{cases} ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0 \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + h = 0 \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + h = 0 \\ ux_4 + vy_4 + wz_4 + h = 0 \end{cases}$$

Si V appartient à $\text{Ker}(f)$, les coordonnées des points M_1, M_2, M_3 et M_4 vérifient donc l'équation du plan $ux + vy + wz + h = 0$.

Il s'agit bien d'un plan car si u, v, w étaient nuls, il en serait de même pour h d'après la question 1) et V serait alors nul.

4) Si le déterminant de L est nul, il existe un vecteur V non nul appartenant au noyau de f , ce qui justifie d'après la question précédente, l'existence d'un plan contenant les quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 . $\boxed{\text{Ils sont donc coplanaires}}$

Réciproquement, si un plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ avec u, v, w non tous nuls contient ces quatre points, V appartient bien au noyau de f qui de ce fait ne contient pas que le vecteur nul. $\boxed{\text{Le déterminant de } L \text{ est donc nul !}}$

B. 1) Remarquons que S est une matrice extraite de L donc $\text{rg}(S) \leq \text{rg}(L) \leq \text{rg}(S) + 1$.

Ainsi, $\text{rg}(L) \leq 3 < 4$ donc $\det(L) = 0$.

On en déduit que quel que soit le point M_4 , les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires. Absurde si les points M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés !

Au final, $\boxed{\text{si } \text{rg}(S) \leq 2 \text{ alors les points } M_1, M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont alignés}}$

2) Montrons que la réciproque est également vraie.

Supposons que les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda_1 \overrightarrow{M_1 M_2} + \lambda_2 \overrightarrow{M_1 M_3} = \vec{0}$ ce qui peut se traduire par :

$$\lambda_1(V_2 - V_1) + \lambda_2(V_3 - V_1) = \vec{0} \text{ soit } \boxed{\lambda_1 V_2 + \lambda_2 V_3 - (\lambda_1 + \lambda_2)V_1 = \vec{0} \quad (*)}$$

La famille (V_1, V_2, V_3) est donc liée ce qui implique $\boxed{\text{rg}(S) < 3}$

C. 1) Si $M_1 \neq M_2, (x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$ donc V_1 et V_2 ne peuvent être colinéaires. Ceci justifie le fait que la famille (V_1, V_2) est libre.

2) Reprenons l'égalité (*) : $\lambda_1 V_2 + \lambda_2 V_3 - (\lambda_1 + \lambda_2)V_1 = \vec{0}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. D'après ce qui précède, $\lambda_2 \neq 0$ sinon la famille (V_1, V_2) serait liée. Ainsi,

$$V_3 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) V_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} V_2$$

En posant $\mu = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$, on retrouve la forme de l'énoncé : $\boxed{V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2}$

D. 1) D'après les hypothèses de l'énoncé, $M_1 \neq M_2$ et les points M_1, M_2, M_3 sont alignés, tout comme les points M_1, M_2, M_4 . D'après ce qui précède, il existe deux réels μ et μ' tels que :

$$V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2 \text{ et } V_4 = \mu' V_1 + (1 - \mu')V_2$$

Les deux dernières lignes de L sont donc bien combinaisons linéaires des deux premières.

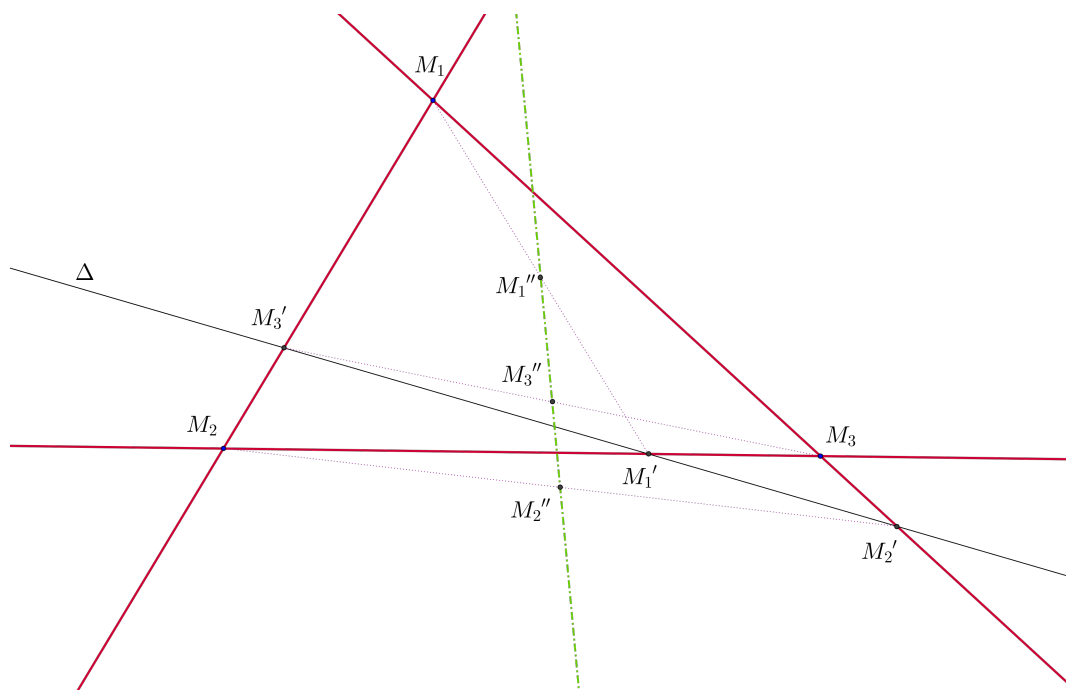
2) En termes de rang, on en déduit que $\text{rg}(L) \leq 2$.

Comme de plus (V_1, V_2) est libre, on en tire $\boxed{\text{rg}(L) = 2}$

Le théorème du rang prouve alors que $\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = 4 - \text{rg}(L) = 2}$

3) D'après le cours, en notant $m(0)$ l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine du polynôme caractéristique, on a : $\boxed{2 = \dim(\text{Ker}(f)) \leq m(0) \leq 4}$

E. 1) Commençons par illustrer un problème analogue en dimension 2 et constatons que les points M_1'', M_2'' et M_3'' sont alignés.



Représentation du problème en dimension 2

Les points M'_1, M_2, M_3 et M_4 sont par construction coplanaires. Donc en reprenant le raisonnement de la question C., on justifie l'existence de $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tels que :

$$V'_1 = \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3 + \delta_1 V_4 \text{ avec } \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 1$$

- 2) Le raisonnement précédent est encore valable pour les points M'_2, M'_3 et M'_4 ce qui permet d'établir l'existence de réels $\alpha_2, \gamma_2, \delta_2, \alpha_3, \beta_3, \delta_3$ et $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ tels que :

$$\begin{cases} V'_2 = \alpha_2 V_1 + \gamma_2 V_3 + \delta_2 V_4 \text{ avec } \alpha_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 1 \\ V'_3 = \alpha_3 V_2 + \beta_3 V_2 + \delta_3 V_4 \text{ avec } \alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 = 1 \\ V'_4 = \alpha_4 V_1 + \beta_4 V_2 + \gamma_4 V_3 \text{ avec } \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 = 1 \end{cases}$$

On a ainsi $L' = TL$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie bien les conditions de l'énoncé.

- 3) On a $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 \\ \alpha_2 + \gamma_2 + \delta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 \\ \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de T associé à la valeur propre 1.

- 4) Les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont non coplanaires donc la matrice L est inversible
De plus, les points M'_1, M'_2, M'_3 et M'_4 sont alignés car ils appartiennent tous à la droite Δ . D'après la question D., L' est donc de rang 2.

Pour finir, $\text{rg}(T) = \text{rg}(L') = 2$ car $L' = TL$ et L est inversible.

Ce dernier résultat ne figure pas explicitement au programme, il faudrait le démontrer.

- 5) 1 est valeur propre de T , tout comme 0 qui est valeur propre au moins double de T puisque $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ (théorème du rang). Notons λ la dernière valeur propre inconnue.

$\text{Tr}(T) = 0 = 1 + 0 + 0 + \lambda$ donc la dernière valeur propre de T est $\lambda = -1$

- 6) Comme les points M''_1, M''_2, M''_3 et M''_4 sont les milieux des segments $[M_1M'_1], [M_2M'_2], [M_3M'_3]$ et $[M_4M'_4]$, on a

$$L'' = (L + L')/2 = \frac{1}{2}(I_4 + T)L$$

En passant au déterminant,

$$\det(L'') = \frac{1}{2^4} \det(I_4 + T) \det(L)$$

Enfin, $\det(T - \lambda I_4) = 0$ puisque $\lambda = -1$ est valeur propre de T .

On en déduit que $\det(L'') = 0$, ce qui prouve la non inversibilité de L''

- 7) L'' n'étant pas inversible, on en déduit que les points M''_1, M''_2, M''_3 et M''_4 sont coplanaires

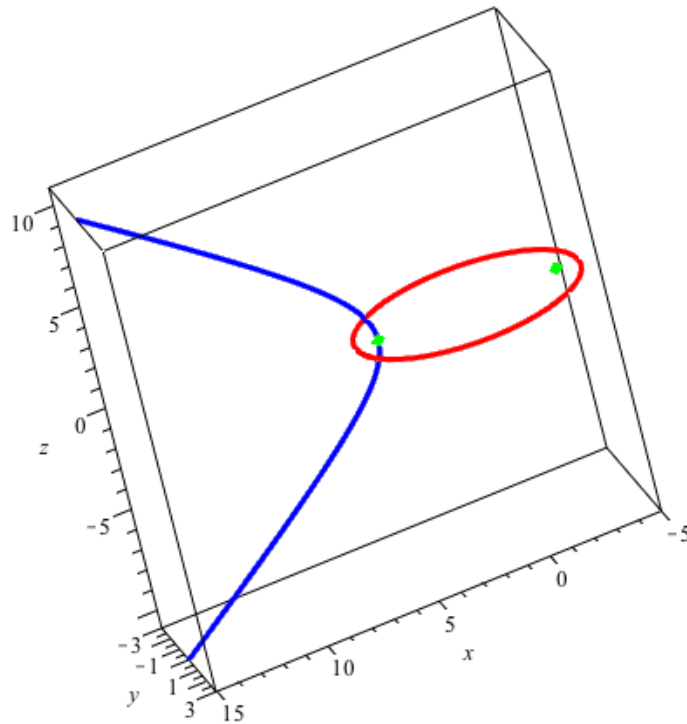
Partie III : un deuxième exemple

- A. La courbe \mathcal{P} a pour équations cartésiennes $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ et $z = 0$. Il s'agit d'une ellipse contenue dans le plan Oxy , de foyers $F(c, 0, 0)$ et $F'(-c, 0, 0)$ où $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

B. 1) De même, la courbe \mathcal{R} est une branche d'hyperbole qui admet pour équations cartésiennes $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$ et $y = 0$.

2) Les asymptotes de \mathcal{H} ont pour équations $z = \pm \frac{3}{4}x$ et $y = 0$

C. Voici une représentation des courbes \mathcal{P} et \mathcal{R} . On remarquera que F appartient à \mathcal{R} .



Représentation de l'ellipse \mathcal{P} et de la branche d'hyperbole \mathcal{R}

D. La tangente à \mathcal{P} en P est dirigée par le vecteur non nul $\vec{p} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \sin(t) \\ 3 \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Celle de \mathcal{R} en R est dirigée par le vecteur non nul $\vec{r} = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \\ z'(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\text{sh}(u) \\ 0 \\ 3\text{ch}(u) \end{pmatrix}$.

E. 1) Le résultat a déjà été démontré à la question II]C.2). Il suffit de vérifier qu'on a $P \neq R$ ce qui est le cas puisque $P = R$ conduirait à $u = 0, t = 0$ modulo π et enfin à $4 = \pm 5$. Absurde !

Ainsi, M, P et R sont alignés si et seulement s'il existe un réel μ tel que $V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2$

2) D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{cases} x = 5\mu \cos(t) + 4(1 - \mu)\text{ch}(u) \\ y = 3\mu \sin(t) \\ z = 3(1 - \mu)\text{sh}(u) \end{cases}$$

3) M doit être situé en dehors du segment $[PR]$ pour qu'un observateur placé en M ait l'illusion d'optique. $V_3 - V_1 = (1 - \mu)(V_2 - V_1)$ peut se réécrire sous la forme $\vec{PM} = (1 - \mu)\vec{PR}$. On doit donc avoir $1 - \mu > 1$ ou bien $1 - \mu < 0$. On retrouve la condition $\mu > 1$ ou $\mu < 1$

Partie IV : recherche de l'ensemble des solutions

A. Les vecteurs $\vec{F}'(t)$ et $\vec{G}'(u)$ étant non nuls quels que soient t et u , ils dirigent les tangentes aux deux courbes en P et Q . Les courbes faisant illusion, on a par définition $\varphi(t, u) = \vec{V} \cdot \vec{W} = 0$ pour tout couple (t, u) .

B. 1) Tout d'abord, $\|\vec{PR}\|^2 = \vec{PR} \cdot \vec{PR}$ donc $\frac{\partial \|\vec{PR}\|^2}{\partial u} = 2\vec{PR} \cdot \frac{\partial \vec{PR}}{\partial u}$.

De plus, $\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP}$ donc $\frac{\partial \vec{PR}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{OR}}{\partial u} = \vec{G}'$. Ainsi, $\frac{\partial \|\vec{PR}\|^2}{\partial u}(t, u) = 2\vec{PR} \cdot \vec{G}'(u)$

2) Comme P_0 et R_0 sont les points qui minimisent la distance entre P et R (et donc qui minimisent $\|\vec{PR}\|^2$), on a la double condition :

$$\frac{\partial \|\vec{PR}\|^2}{\partial t}(t_0, u_0) = \frac{\partial \|\vec{PR}\|^2}{\partial u}(t_0, u_0) = 0$$

qui se traduit d'après la question précédente par $2\vec{P_0R_0} \cdot \vec{F}'(t_0) = 2\vec{P_0R_0} \cdot \vec{G}'(u_0) = 0$.

Ceci prouve que $\vec{P_0R_0}$ est orthogonal à $\vec{F}'(t_0)$ et à $\vec{G}'(u_0)$

C. 1) Comme $\frac{\partial \vec{PR}}{\partial u} = \vec{G}'$, $\frac{\partial Z}{\partial u} = Z'$ et les notations de l'énoncé sont bien justifiées.

De plus, $\vec{F}'(t)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} \varphi(t, u) &= \vec{V} \cdot \vec{W} = (\vec{PR} \wedge \vec{F}'(t)) \cdot (\vec{PR} \wedge \vec{G}'(u)) \\ &= \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} vY \\ -vX \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} YZ' - Y'Z \\ ZX' - XZ' \\ XY' - X'Y \end{pmatrix} = v((X^2 + Y^2)Z' - (XX' + YY')Z) \end{aligned}$$

v étant non nul, on a donc $(X^2 + Y^2)Z' - (YY' + XX')Z = 0$

2) Le dénominateur de la quantité $h(u)$ est $\|\vec{PR}\|^2$ (non nul) et la fonction h est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout réel u , $h'(u) = \frac{\|\vec{PR}(u)\|^2 2Z(u)Z'(u) - 2\vec{PR}(u) \cdot \vec{G}'(u)Z(u)}{\|\vec{PR}(u)\|^4}$

3) Montrons que h' est nulle.

$$\begin{aligned} 2\|\vec{PR}\|^2 ZZ' - 2\vec{PR} \cdot \vec{G}' Z^2 &= 2(X^2 + Y^2 + Z^2)ZZ' - 2Z^2(XX' + YY' + ZZ') \\ &= 2Z((X^2 + Y^2)Z' - (XX' + YY')Z) \\ &= \frac{2Z}{v} \varphi(t, u) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi h' est nulle sur l'intervalle \mathbb{R} donc h est constante sur \mathbb{R}

4) Notons λ cette constante. On a $Z^2 = \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2)$ mais encore :

$$\lambda X^2 + \lambda Y^2 + (\lambda - 1)Z^2 = 0$$

- Cas où $\lambda = 0$
On obtient un plan d'équation $Z = 0$, plan passant par P et « orthogonal à » $\vec{F}'(t)$.
- Cas où $\lambda = 1$
 \mathcal{R} est alors contenue dans la droite d'équations $X = 0$ et $Y = 0$.
Absurde par hypothèse sur \mathcal{R} .
- Cas où $\lambda > 1$ ou $\lambda < 0$
On trouve $X = Y = Z = 0$ et comme $P \notin \mathcal{R}$, \mathcal{R} est vide.
Absurde par hypothèse sur \mathcal{R} .
- Cas où $\lambda \in]0, 1[$
On obtient un cône dont le sommet est P et d'axe OZ c'est-à-dire dirigé par $\vec{F}'(t)$.

Donc que que soit t , $\mathcal{S}(t)$ est un plan ou bien un cône

- D. 1) R_0 appartient à \mathcal{R} donc à $\mathcal{S}(t_0)$.
- 2) $P_0 \in \Gamma$ et $\vec{P_0R_0}$ est orthogonal à $\vec{F}'(t_0)$, vecteur normal au plan Γ , donc $R_0 \in \Gamma$. Ainsi, $Z(u_0) = 0$ et $h(u_0) = 0$. Or h étant constante, on en déduit que h est la fonction nulle et que \mathcal{R} est contenue dans le plan $\mathcal{S}(t_0) = \Gamma$.
- E. 1) Si \mathcal{P} et \mathcal{R} étaient contenues dans le même plan Γ , les vecteurs \vec{p}_1 et \vec{r}_1 seraient colinéaires donc non orthogonaux. La courbe ne ferait donc pas illusion.
- 2) Remarquons qu'un tel point P_1 existe puisque \mathcal{P} n'est pas contenue dans le plan Γ .
Si $\mathcal{S}(t_1)$ était un plan, \mathcal{R} serait contenue dans l'intersection des deux plans $\mathcal{S}(t_1)$ et Γ .
Si ces deux plans ne sont pas confondus, \mathcal{R} est vide ou contenue dans une droite, absurde par hypothèse sur \mathcal{R} . Ces deux plans ne peuvent pas être confondus puisque $P_1 \in \mathcal{S}(t_1)$ et $P_1 \notin \Gamma$. Ainsi, $\mathcal{S}(t_1)$ est un cône de sommet P_1
- F. 1) \mathcal{R} étant contenue à la fois dans $\mathcal{S}(t_0)$ et dans $\mathcal{S}(t_1)$, \mathcal{R} est contenue dans l'intersection d'un cône et d'un plan. On a même prouvé que ce cône avait pour sommet un point n'appartenant pas au plan Γ (le point P_1). L'intersection est donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole.
- 2) Le raisonnement est identique pour la courbe \mathcal{P} qui elle, est incluse dans le plan passant par R_0 et de vecteur normal $\vec{G}'(u_0)$.
De plus, $\vec{F}'(t_0)$ et $\vec{G}'(u_0)$ sont orthogonaux : leurs coordonnées dans le repère P_0XYZ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque $Z = 0$ quel que soit u . D'un point de vue plus géométrique, \mathcal{R} est contenue dans le plan P_0XY donc tous les tangentes à la courbe sont dirigées par des vecteurs orthogonaux à $\vec{F}'(t_0)$. Ainsi, pour faire illusion, les courbes doivent être deux portions de coniques contenues dans des plans orthogonaux