

**I.1. Premières propriétés.**

- a. Si  $x$  est vecteur co-propre (non nul) associé à  $\mu_1$  et  $\mu_2$  il vient  $(\mu_1 - \mu_2)x = 0$  donc  $\mu_1 = \mu_2$  car  $x \neq 0$ . CQFD.
- b. Si  $\mu$  est valeur co-propre et  $x$  vecteur co-propre associé, il vient immédiatement (tenant compte de la semi-linéarité) que  $e^{i\theta}$  est également valeur co-propre et que  $e^{-i\theta/2}x$  est vecteur co-propre associé. CQFD.
- c.  $E_\mu$  est un espace vectoriel réel mais n'est pas un espace vectoriel complexe.
- d. Il vient immédiatement que la composée de deux applications semi-linéaires est linéaire.

**I.2. Matrice associée à une application semi-linéaire.**

- a. Soit  $A = (a_{ij})$  avec  $a_{ij}$  la  $i^{eme}$  composante de  $u(e_j)$  sur la base  $\mathcal{B} = (e_k)$ . Soit  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  et  $y = u(x)$ .

Il vient  $y = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} u(e_k)$  donc  $y_i = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} a_{ik}$ . Ainsi  $\boxed{Y = A\overline{X}}$ . CQFD.

- b. Soit  $x$  quelconque de  $E$  et soit  $y = u(x)$ . Avec des notations claires on a, d'après a. ci-dessus :

$Y = A\overline{X}$  et  $Y' = B\overline{X'}$ . Or  $Y = SY'$  et  $X = SX'$  donc  $SY' = A\overline{SX'} = A\overline{S}\overline{X'}$  soit  $Y' = (S^{-1}A\overline{S})\overline{X'}$  puisque  $S$  est inversible. Il en résulte que  $\Delta X' = 0$  avec  $\Delta = B - S^{-1}A\overline{S}$  et cela pour tout vecteur  $x$  donc pour toute colonne  $X'$ . En prenant  $X'$  successivement égal aux vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , il vient que toutes les colonnes de  $\Delta$  sont nulles donc que  $\Delta$  est nulle. Ainsi  $\boxed{B = S^{-1}A\overline{S}}$ .

**I.3. Exemples.**

- a. Si  $X$  est vecteur co-propre (non nul) associé à la valeur co-propre  $\mu$  il vient  $\begin{cases} \overline{b} = -\mu a \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$  donc  $\begin{cases} b = -|\mu|^2 b \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$ .

Or  $X \neq 0$  donc  $b \neq 0$  car  $b = 0$  implique  $a = 0$  donc  $X = 0$ . Ainsi  $|\mu|^2 = -1$  ce qui est impossible.

La rotation d'angle  $\pi/2$  n'admet aucune valeur co-propre.

- b. Si  $A$  est réelle et admet une valeur propre réelle  $\lambda$  alors il existe  $X$  vecteur réel non nul tel que  $AX = \lambda X$ . Or  $X = \overline{X}$  de sorte que  $A\overline{X} = \lambda X$ .

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est valeur propre de la matrice réelle  $A$  alors elle est également valeur co-propre .

**I.4. Valeurs co-propre de  $A$  et valeurs propres de  $A\overline{A}$ .**

- a. De  $A\overline{X} = \mu X$  on tire immédiatement  $A\overline{A}X = |\mu|^2 X$ . CQFD.

- b. Avec les notations de l'énoncé :

- Supposons  $A\overline{X}$  et  $X$  liés. Comme  $X \neq 0$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $A\overline{X} = \alpha X$  ce qui implique que  $\alpha$  est valeur co-propre de  $A$ . D'après a. ci-dessus  $A\overline{A}X = |\alpha|^2 X$ . Donc  $\lambda X = |\alpha|^2 X$  et  $\lambda = |\alpha|^2$  car  $X \neq 0$ . Il en résulte qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha = \sqrt{\lambda} e^{i\theta}$ . Comme  $\alpha$  est valeur co-propre de  $A$ , il en découle d'après 1.b. que  $\sqrt{\lambda} = \alpha e^{-i\theta}$  est également valeur co-propre . CQFD.

- Supposons désormais  $A\overline{X}$  et  $X$  indépendants. Il est naturel de chercher un vecteur co-propre associé à  $\sqrt{\lambda}$  dans le plan engendré par ces deux vecteurs ce qui revient à chercher un vecteur co-propre de la forme  $Y = A\overline{X} + \alpha X$ . Or  $A\overline{Y} = \lambda X + \overline{\alpha} A\overline{X}$ . On constate que  $\alpha = \sqrt{\lambda}$  convient. CQFD.

Autre solution dans ce cas : soit  $u$  l'application semi-linéaire de matrice  $A$  dans la base canonique. On vérifie facilement que le plan engendré par les deux vecteurs  $A\overline{X}$  et  $X$  est stable par  $u$  et que la matrice de la restriction  $v$  de  $u$  à ce plan dans la base  $(A\overline{X}, X)$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ . Or cette matrice est réelle et admet  $\sqrt{\lambda}$  comme valeur propre donc, d'après 3.b.,  $\sqrt{\lambda}$  est valeur co-propre de  $v$  donc de  $u$ . CQFD.

- c. Il découle immédiatement de a. et de b. que :

$\mu \geq 0$  est valeur co-propre de  $A$  si et seulement si  $\mu^2$  est valeur propre de  $A\overline{A}$ .

**I.5. Cas d'une matrice triangulaire supérieure.**

- a. Soit  $A$  triangulaire supérieure de diagonale donc de spectre  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Classiquement la matrice  $A\overline{A}$  est triangulaire supérieure de diagonale donc de spectre  $(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$ . Ainsi si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $|\lambda|^2$  est valeur propre de  $A\overline{A}$ . D'après 4. ci-dessus,  $|\lambda|$  est valeur co-propre de  $A$ , donc  $\lambda$  également d'après 1.b., donc encore  $\lambda e^{i\theta}$  pour tout réel  $\theta$  toujours d'après 1.b. CQFD.

- b. Si  $\mu$  est valeur co-propre de  $A$  alors  $|\mu|$  également d'après 1.b. donc  $|\mu|^2$  est valeur propre de  $A\overline{A}$  donc figure sur la diagonale. Donc il existe  $\lambda$  sur la diagonale de  $A$  donc valeur propre de  $A$  tel que  $|\lambda|^2 = |\mu|^2$ . Donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda = \mu e^{i\theta}$ . CQFD.

En résumé :

Soit  $A$  triangulaire. Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $\lambda e^{i\theta}$  est valeur co-propre de  $A$  pour tout réel  $\theta$ .

Réciproquement si  $\mu$  est valeur co-propre de  $A$  il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\mu e^{i\theta}$  soit valeur propre de  $A$ .

- c. D'après **a.** ci-dessus, 1 est bien valeur co-propre de  $A$  et, avec les notations de l'énoncé,  $A\bar{X} = X \iff \begin{cases} a = b + c \\ d = c \end{cases}$   
 $E_1$  est un plan de  $\mathbb{C}^2$  identifié à  $\mathbb{R}^4$ .

### I.6. Une caractérisation des valeurs co-propres.

$\mu = \mu_1 + i\mu_2$  (avec  $\mu_1$  et  $\mu_2$  réels) est valeur co-propre de  $A = B + iC$  si et seulement si il existe  $Z = X + iY \neq 0$  (avec  $X$  et  $Y$  réels) tel que  $A\bar{Z} = \mu Z$  c'est à dire tel que 
$$\begin{cases} BX + CY = \mu_1 X - \mu_2 Y \\ CX - BY = \mu_2 X + \mu_1 Y \end{cases} \quad (S).$$

Supposons  $\mu$  valeur co-propre. Alors  $|\mu|$  aussi d'après **1.b.**. En reportant dans (S) ci-dessus avec  $\mu_1 = |\mu|$  et  $\mu_2 = 0$  il vient que  $D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  donc  $|\mu|$  est valeur propre de  $D$  puisque  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  est non nul.

Réciproquement supposons que  $|\mu|$  soit valeur propre de  $D$ . Alors (S) implique que  $|\mu| = |\mu| + i0$  est valeur co-propre de  $A$  donc  $\mu$  aussi d'après **1.b.**

$\mu$  est valeur co-propre de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  si et seulement si  $|\mu|$  est valeur propre de  $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ .

### II.1. Une relation d'équivalence.

D'après **I.2.b.**  $A$  et  $B$  sont en relation si et seulement si elles repèrent la même application semi-linéaire dans deux bases différentes. Il est alors patent qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. CQFD.

La relation de co-similarité est une relation d'équivalence.

### II.2. Indépendance des vecteurs co-propres.

D'après **I.4.a.** la famille  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  est une famille de vecteurs propres de  $A\bar{A}$  associés aux valeurs propres  $|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \dots, |\mu_k|^2$  qui sont deux à deux distinctes donc cette famille est libre par le théorème d'indépendance linéaires des sous-espaces propres. CQFD.

Il en découle immédiatement d'après **I.4.c.** que :

Si la matrice  $A\bar{A}$  admet  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  positives ou nulles et deux à deux distinctes alors  $A$  est co-diagonalisable en  $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ .

### II.3. Quelques propriétés.

- a. Il vient immédiatement que  $A\bar{A} = I_n$ .

- b. Pour toute matrice  $A$ , on peut trouver  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $-e^{-2i\theta}$  ne soit pas valeur propre donc tel que  $A + e^{-2i\theta} I_n$  soit inversible donc  $S(\theta)$  aussi.

Si on suppose en outre que  $A\bar{A} = I_n$  alors  $A\bar{S}(\theta) = S(\theta)$  d'où  $A = S(\theta)\bar{S}^{-1}(\theta)$ .

En résumé :

$A\bar{A} = I_n$  si et seulement si il existe  $S \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = \bar{S}S^{-1}$  c'est à dire  $A$  co-semblable à  $I_n$ .

### II.4. Une condition nécessaire de co-diagonalisabilité.

Notons  $S^{-1}A\bar{S} = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Il vient  $A\bar{A} = S D \bar{D} S^{-1}$ .

Ainsi  $A\bar{A}$  est semblable à  $D\bar{D} = \text{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$  donc est bien diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles. En outre le rang de  $A$  est égal à celui de  $D$  (puisque  $S$  est inversible) donc au nombre de  $\lambda_i$  non nuls donc encore au rang de  $D\bar{D}$  donc à celui de  $A\bar{A}$  (car semblable). CQFD.

### II.5. Une condition suffisante de co-diagonalisabilité.

- a.  $B\bar{B} = (S^{-1}A\bar{S})(\bar{S}^{-1}\bar{A}S) = S^{-1}A\bar{A}S = \Lambda$  Or  $\Lambda$  est réelle. Donc  $B\bar{B} = \bar{B}B = \Lambda$ .

Il vient alors  $B\Lambda = B(B\bar{B}) = B(\bar{B}B) = (B\bar{B})B = \Lambda B$ . Ainsi  $\Lambda$  et  $B$  commutent.

- b. Comme la matrice  $B$  commutent avec la matrice  $\Lambda$ , les sous-espaces propres de  $\Lambda$  sont stables par  $B$ . Donc :

La matrice  $B$  s'écrit par blocs sous la forme proposée.

- c. De  $B\bar{B} = \Lambda$  on tire par blocs que  $B_i\bar{B}_i = \lambda_i I_{n_i}$ .

Si  $\lambda_i > 0$  on en déduit par **II.3.b.** que  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i$  est co-semblable à  $I_{n_i}$  donc que  $B_i$  est co-semblable à  $\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$ .

Comme  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \geq 0$  il vient que ceci est valable pour  $i$  de 1 à  $k-1$ .

Si  $\lambda_k > 0$  c'est également vrai pour  $i = k$ .

Mais c'est encore vrai pour  $i = k$  même si  $\lambda_k = 0$ . En effet dans ce cas il vient  $\text{rg}(A\bar{A}) = \text{rg}(\Lambda) = n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$  et  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{rg}(B_1) + \text{rg}(B_2) + \dots + \text{rg}(B_k)$ . Or pour  $i \leq k-1$ ,  $B_i$  est co-semblable à  $\sqrt{\lambda_i}I_{n_i}$  donc  $\text{rg}(B_i) = n_i$ . Comme par hypothèse  $A\bar{A}$  et  $A$  ont même rang, il vient que  $\text{rg}(B_k) = 0$  donc que  $B_k = 0$  et ainsi  $B_k$  (matrice nulle) est bien co-semblable à  $\sqrt{\lambda_k}I_{n_k}$  (matrice nulle).

Ainsi  $B_i$  est co-semblable à  $\sqrt{\lambda_i}I_{n_i}$  pour tout  $i$  de 1 à  $k$ . Il en découle immédiatement par blocs que  $B$  est co-semblable à la matrice  $\Delta$  obtenue à partir de  $\Lambda$  en remplaçant les  $\lambda_i$  par  $\sqrt{\lambda_i}$ .

Or  $A$  est co-semblable à  $B$  donc à  $\Delta$ . CQFD.

En résumé :

Les trois propriétés constituent une condition nécessaire et suffisante de co-diagonalisabilité.

## II.6. Exemples.

- a. Si  $A$  est symétrique réelle, elle est (ortho-)semblable à  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  donc  $A\bar{A} = A^2$  est semblable à  $D^2$  et la condition précédente est clairement satisfaite. CQFD.

Une matrice symétrique réelle est co-diagonalisable.

Remarque : une matrice hermitienne n'est pas forcément co-diagonalisable. En effet par exemple  $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

n'est pas co-diagonalisable car est de rang 1 alors que  $A\bar{A} = 0$ .

- b.  $A\bar{A} = I_2$  donc la condition est clairement satisfaite.  $A$  est co-diagonalisable.

$B\bar{B} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dont les valeurs propres ne sont pas réelles.  $B$  n'est pas co-diagonalisable.

$C\bar{C} = 0$  alors que  $C$  est de rang 1.  $C$  n'est pas co-diagonalisable.

$D\bar{D} = I_2$  et la condition est clairement satisfaite.  $D$  est co-diagonalisable.

————— FIN —————