concours interne
et concours d'accès à l'échelle de rémunération des professeurs agrégés

session de 1989

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828 du 28 juillet 1986.

La précision des démonstrations et la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Les parties II, III, IV de ce problème étudient le groupe des homéomorphismes du cercle trigonométrique U du plan complexe. L'invariant « nombre de rotation » d'un homéomorphisme h *de U a été découvert par H. Poincaré en 1885 ; sa définition, ses propriétés, font l'objet des parties III et IV. Au préalable, dans la partie I (relativement indépendante des suivantes), on étudie les fonctions solutions d'une équation aux différences finies qui intervient naturellement, et dans la partie II, on considère quelques exemples d'homéomorphismes de U.*

La composée de deux applications f et g sera notée $f \circ g$. Muni de cette loi de composition interne, l'ensemble S_X des bijections d'un ensemble X sur lui-même est un groupe (groupe des permutations de X). Comme dans tout groupe multiplicatif, pour $k \in \mathbb{N}_*$ nous noterons f^k le produit $f \circ f \circ \ldots \circ f$ de k éléments de S_X égaux à f, et f^{-k} le produit $f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$ de k éléments égaux à l'application réciproque f^{-1} et pour $k = 0$ on pose $f^0 = 1_X$ élément neutre du groupe S_X. Tout élément f de S_X définit une action du groupe $\mathbb{Z}$ sur X. Pour $x_0 \in X$, on appelle orbite de x_0 sous l'action de f, la suite des éléments $x_k = f^k(x_0)$ de X, où $k \in \mathbb{Z}$, obtenue en itérant l'action de f et celle de f^{-1}.

Si X est un espace métrique, on appelle homéomorphisme de X, un élément f de S_X continu, ainsi que l'application réciproque f^{-1}. Les homéomorphismes de X constituent un sous-groupe H_X de S_X. Deux éléments f_1 et f_2 de H_X sont dits conjugués, s'il existe $g \in H_X$ tel que $f_2 = g^{-1} \circ f_1 \circ g$.

Dans la suite, nous noterons :

- $E[x]$ la partie entière d'un nombre réel x (unique entier relatif tel que $E[x] \leq x < E[x] + 1$) ;
- $C(J)$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues réelles sur un intervalle J de $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}[X]$ Le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ formé des fonctions polynomiales réelles d'une variable réelle ;
- t la translation $x \mapsto x + 1$ sur $\mathbb{R}$;
- D l'opérateur aux différences finies $f \mapsto f \circ t - f$ de $C(\mathbb{R})$ dans $C(\mathbb{R})$.

I. ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $Df = b$

Soit $b \in C(\mathbb{R})$. On se propose d'étudier les solutions $f \in C(\mathbb{R})$ de l'équation aux différences finies :

(1) $$Df = b \qquad \text{soit} \qquad f \circ t - f = b.$$

1\. *a.* Caractériser les éléments du noyau de l'application linéaire D.

b. Supposons donnée une solution $f_1 \in C(\mathbb{R})$ de l'équation (1). Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (1) ?

c. Exemple. Quel est l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbb{R})$ telles que :

$$f(x+1) - f(x) = \cos x \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(On remarquera qu'il existe une solution du type $x \mapsto a \sin x + b \cos x$.)

2\. Dans cette question, la fonction b est constante égale à 1.

a. Soit $f \in C(\mathbb{R})$ une solution de (1). Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x + \alpha \leq f(x) \leq x + \beta \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Tournez la page S.V.P.

b. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

c. Si f est de classe C^1, montrer que f est lipschitzienne, et que la constante de Lipschitz k de f vérifie $k \geq 1$.

Si $k = 1$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x + \alpha$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3. Dans cette question, on suppose que $b \in \mathbb{R}[X]$.

a. Si $f \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $Df = 0$, montrer que f est constante.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit P_k le polynôme défini de la manière suivante :

$$P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_k(x) = \frac{1}{k!}\, x(x-1)\dots(x-k+1) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Pour $k \geq 1$, montrer que $DP_k = P_{k-1}$.

c. Montrer que $P_0, P_1, \dots, P_n$ constituent une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

d. Pour $b \in \mathbb{R}[X]$, montrer que l'équation $Df = b$ possède une solution unique $f \in \mathbb{R}[X]$ telle que : $f(0) = 0$.

4. *a.* Soit $f \in C(\mathbb{R})$ une solution de (1). Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $n = E[x]$ et $u = x - n$. Montrer que :

$$f(x) = f(u) + \sum_{k=0}^{n-1} b(u+k) \qquad \text{pour} \quad x > 1,$$

$$f(x) = f(u) - \sum_{k=1}^{|n|} b(u-k) \qquad \text{pour} \quad x < 0.$$

b. On suppose que $b(x)$ tend vers une limite strictement positive quand x tend vers $+\infty$. Montrer que toute solution $f \in C(\mathbb{R})$ de (1) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Formuler et prouver une assertion analogue quand x tend vers $-\infty$.

5. Supposons b à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$. Supposons que (1) possède une solution $f \in C(\mathbb{R})$ bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que toute solution de (1) est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et que l'intégrale $\int_0^\infty b(s)\,ds$ est convergente.

(On pourra exprimer $\int_0^x b(s)\,ds$ à l'aide de la fonction f).

6. On suppose que b est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$ et telle que l'intégrale $\int_0^\infty b(s)\,ds$ soit convergente.

a. Montrer que toute solution $f \in C(\mathbb{R})$ de (1) est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b. On pose $f_1 = -\sum_{k=0}^{\infty} b \circ t^k$. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$, que la fonction f_1 est continue, solution de (1).

c. Montrer que $f_1(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$, et que c'est la seule solution de (1) ayant cette propriété.

7. Étude d'un exemple. La fonction trigonométrique tan définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque, notée ici Arc tan. On suppose dans cette question, que $b(x) = \operatorname{Arc\,tan}(e^{-x})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a. On pose $f = -\sum_{k=0}^{\infty} b \circ t^k$. Montrer que l'on définit ainsi une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, solution de (1).

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}x - f(1-x)$. Montrer que $D\phi = 0$.

En déduire que le graphe de f présente une direction asymptotique lorsque x tend vers $-\infty$.

c. Calculer la valeur moyenne $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ de ϕ. Montrer que la fonction ϕ n'est pas constante (on vérifiera que sa dérivée d'ordre trois $\phi^{(3)}(0)$ n'est pas nulle).

d. Préciser le sens de variation de f. Étudier les branches infinies et la forme générale de son graphe.

A SUIVRE

II. EXEMPLES D'HOMÉOMORPHISMES DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Pour la commodité de l'expression, le plan (affine euclidien) muni d'un repère orthonormé d'origine O, sera identifié avec $\mathbb{C}$. On note U le cercle trigonométrique, ensemble des points M dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ a pour module un. On note H le groupe des homéomorphismes de U qui préservent l'orientation, c'est-à-dire tels que $h(z)$ décrive U dans le sens direct, lorsque z décrit U dans le sens direct. Si I et J sont deux points distincts de U, on notera $[I, J]$ (respectivement $]I, J[$) l'arc du cercle U qui relie I à J dans le sens direct, bornes I et J comprises (respectivement bornes I et J non comprises).

On note G l'ensemble des fonctions $g \in C(\mathbb{R})$ qui sont strictement croissantes et vérifient $g \circ t = t \circ g$, soit :

$$g(x+1) = g(x) + 1 \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que G est un sous-groupe du groupe $H_{\mathbb{R}}$ des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.

2. Soit $h \in$ H. Choisissons $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{2i\pi y_0} = h(1)$. Montrer qu'il existe $g \in$ G unique telle que $g(0) = y_0$ et $e^{2i\pi g(x)} = h(e^{2i\pi x})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   Si on remplace y_0 par $y_0 + k$ où $k \in \mathbb{Z}$, montrer que g est remplacée par $x \mapsto g(x) + k$.

3. Soit $g \in$ G. Pour $z = e^{2i\pi x} \in$ U, on pose $h(z) = e^{2i\pi g(x)}$. Montrer que $h(z)$ est bien défini (malgré la multiplicité des choix possibles de $x \in \mathbb{R}$ pour exprimer z) et que $h : z \mapsto h(z)$ est élément de H. Montrer que l'application ϕ qui à $g \in$ G associe cet élément $h \in$ H est un homomorphisme de groupes. Montrer que ϕ est surjectif, et préciser son noyau.

   Dans la suite, on dira que $g \in$ G définit $h \in$ H lorsque $\phi(g) = h$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On fait agir $\mathbb{Z}$ sur U par la rotation $R_\alpha \in$ H de centre O et d'angle $2\pi\alpha$.

   a. Quelles sont les fonctions $g \in$ G qui définissent R_α ?

   b. Soit $M_0 \in$ U. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ distincts tels que $(R_\alpha)^p(M_0) = (R_\alpha)^q(M_0)$. Montrer que α est rationnel. Réciproquement, si α est rationnel, montrer que tout point de U a une orbite finie.

   c. Si α est irrationnel, montrer que tout point M_0 de U a une orbite $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ partout dense dans U (telle que pour tout couple (I, J) de points distincts de U, l'arc $]I, J[$ contienne des points de la suite (M_k)).

5. Étude d'éléments particuliers du groupe H. Notons Δ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$. Soient A, B deux points du plan, d'affixes $a \in \Delta$, $b \in \Delta$. À tout point M de U d'affixe z, on associe le point M′ de U tel que les droites (AM) et (BM′) soient parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ étant de même sens. On note $z' = h_{b,a}(z)$ l'affixe de M′.

   a. Pour a, b, c éléments de Δ, montrer que $h_{c,a} = h_{c,b} \circ h_{b,a}$, et illustrer par une figure cette propriété.

   b. Considérons $a \in \Delta$ et $b = 0$. Exprimer $z' = h_{0,a}(z)$ en fonction de z. Montrer que $h_{0,a}$ est élément de H.

   Pour a, $b \in \Delta$, montrer que $h_{b,a} \in$ H.

   c. Supposons que $b = -a \in \Delta$. Montrer que $h_{-a,a}$ est définie par $h_{-a,a}(z) = \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ où $\bar{a}$ est l'imaginaire conjugué de a.

   d. On suppose que $a \in \Delta$, $b \in \Delta$ sont distincts. On note I, J les points d'intersection de U avec la droite (AB) (les points I, A, B, J se présentant dans cet ordre sur la droite (AB) orientée par $\overrightarrow{AB}$). Soit M_0 un point de l'arc $]I, J[$.

   Sur une figure, construire les premiers points $\ldots M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \ldots$ de l'orbite de M_0. Montrer que M_k tend vers une limite lorsque k tend vers $+\infty$, et de même lorsque k tend vers $-\infty$.

   Montrer que dans le groupe H, l'homéomorphisme $h_{b,a}$ n'est conjugué d'aucune rotation R_α (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

   e. Soit A un point du plan affine, d'affixe $a \in \Delta$. À tout point M de U d'affixe z, on associe l'autre point M′ d'intersection de la droite (AM) avec U. Calculer l'affixe $z' = h_a(z)$ de M′. Montrer que h_a est un élément de H, conjugué d'une rotation R_α pour une valeur de α que l'on précisera.

III. NOMBRE DE ROTATION D'UN HOMÉOMORPHISME DE U

On conserve toutes les notations de la partie II. On considère $g \in G$ et $h \in H$ défini par g (voir II.3.).

1. Soient x_0, x_1 deux réels. Montrer que la partie entière de $g^n(x_1) - g^n(x_0)$ ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{g^n(x_0)}{n} - \dfrac{g^n(x_1)}{n} \right| = 0$.

2. On suppose qu'il existe $M_0 \in U$ et $m \in \mathbb{N}_*$ tels que $h^m(M_0) = M_0$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $g^m(x_0) = x_0 + p$. Calculer $g^{km}(x_0)$ pour $k \in \mathbb{N}_*$ et montrer que $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{g^{km}(x_0)}{km} = \dfrac{p}{m}$. En déduire que $\dfrac{g^n(x_0)}{n}$ tend vers $\dfrac{p}{m}$ lorsque n tend vers $+\infty$. $\left(\text{On pourra considérer la partie entière } k \text{ de } \dfrac{n}{m}\right)$

3. Supposons, au contraire de 2., que pour tout $m \in \mathbb{N}_*$ l'homéomorphisme h^m de U ne possède aucun point fixe. Soient $p \in \mathbb{N}_*$ et $q \in \mathbb{N}_*$.
Soit $a = E[g^p(0)]$. Montrer que $x + a < g^p(x) < x + a + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Établir alors que $x + ka < g^{pk}(x) < x + k(a+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $k \in \mathbb{N}_*$.
En déduire que :
$$\left| \frac{g^{pq}(0)}{pq} - \frac{g^p(0)}{p} \right| < \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \left| \frac{g^p(0)}{p} - \frac{g^q(0)}{q} \right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
Montrer que la suite des réels $\dfrac{g^n(0)}{n}$, où $n \in \mathbb{N}_*$, tend vers une limite $r(g)$ dans $\mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. *a.* Des trois questions précédentes, déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $\dfrac{g^n(x)}{n}$, où $n \in \mathbb{N}_*$, admet une limite dans $\mathbb{R}$, que cette limite ne dépend pas du choix de $x \in \mathbb{R}$. On la notera $r(g)$.
b. Montrer que $r(g^m) = mr(g)$ pour $m \in \mathbb{N}$.

5. Soit $g_1 \in G$ qui commute avec g (tel que $g_1 \circ g = g \circ g_1$). Soit $m \in \mathbb{N}_*$.
a. Montrer qu'on peut choisir $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant $p - 1 < mr(g) < p + 1$. Montrer qu'il existe alors $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq k_0$,
$$g_1^{km}(0) + k(p-1) < (g_1 \circ g)^{km}(0) < g_1^{km}(0) + k(p+1).$$
En déduire que $r(g_1 \circ g) = r(g_1) + r(g)$.
b. S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g_1(x_0) \leq g(x_0)$, montrer que l'on a $r(g_1) \leq r(g)$.

6. Soit $g' \in G$ un autre élément tel que $\phi(g') = h$; montrer que $r(g') - r(g) \in \mathbb{Z}$.
On notera $r(h)$ la valeur modulo $\mathbb{Z}$ de $r(g)$, et on l'appellera le nombre de rotation de $h \in H$.
Soient h_1, h_2 deux éléments de H qui sont conjugués. Montrer qu'il existe des éléments g_1, g_2 de G définissant h_1, h_2 et $g_0 \in G$ tels que $g_2^n \circ g_0 = g_0 \circ g_1^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $g_1^n(x) + \alpha \leq g_2^n(g_0(x)) \leq g_1^n(x) + \beta$ pour $x \in \mathbb{R}$, et enfin que $r(h_1) = r(h_2)$.

7. On fait l'hypothèse que $r(g) = 0$.
On suppose $0 < g(0)$. Montrer que l'on a $g^n(0) < 1$ pour $n \in \mathbb{N}_*$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que la suite $g^n(0)$ a une limite $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $g(x_0) = x_0$.
Si on suppose $g(0) < 0$, prouver de même que g possède un point fixe.
Réciproquement, si g possède un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer que $r(g) = 0$.

8. *a.* Supposons que $r(g)$ soit un rationnel $\dfrac{p}{m}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}_*$. On pose $f(x) = g^m(x) - p$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f possède un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}$.
b. Montrer que $h \in H$ possède une orbite finie si et seulement si $r(h)$ est un rationnel modulo $\mathbb{Z}$.

A SUIVRE

9. Calculer $r(h)$ lorsque $h \in H$ est la rotation R_α d'angle $2\pi\alpha$ (voir II.4.), lorsque $h = h_{b,a}$ où $a \in \Delta$, $b \in \Delta$ (voir II.5.), lorsque $h = h_a$ où $a \in \Delta$ (voir II.5.*e*.).

10. On va établir maintenant une propriété de continuité de l'application $g \mapsto r(g)$ de G dans $\mathbb{R}$. Pour $g \in G$, $g' \in G$, on pose $d(g, g') = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - g'(x)|$.

 a. Justifier l'existence du réel d (g, g'). Soient $g_0 \in G$, $g'_0 \in G$ et $\varepsilon > 0$.

 Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour $g \in G$, $g' \in G$ la condition $(d(g, g_0) < \eta$ et $d(g', g'_0) < \eta)$ implique $d(g \circ g', g_0 \circ g'_0) < \varepsilon$.

 b. Considérons $g_0 \in G$ et soit $\varepsilon > 0$. On choisit $q \in \mathbb{N}_*$ tel que :

$$\frac{2}{q} < \varepsilon \quad \text{puis} \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad \frac{p-1}{q} < r(g_0) < \frac{p+1}{q}$$

 Montrer que $x + p - 1 < g_0^q(x) < x + p + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

 c. Montrer qu'il existe alors $\delta > 0$ tel que $x + p - 1 + \delta \leq g_0^q(x) \leq x + p + 1 - \delta$ pour $x \in \mathbb{R}$.

 d. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour $g \in G$, la condition $d(g, g_0) < \eta$ implique $d(g^q, g_0^q) < \delta$. En déduire alors $x + p - 1 < g^q(x) < x + p + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis :

$$\frac{p-1}{q} \leq r(g) \leq \frac{p+1}{q} \quad \text{et enfin} \quad |r(g) - r(g_0)| < \varepsilon.$$

IV. HOMÉOMORPHISMES DONT LE NOMBRE DE ROTATIONS EST IRRATIONNEL

On conserve les notations des parties II et III. Soit $h \in H$ dont le nombre de rotations $\alpha = r(h)$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ modulo $\mathbb{Z}$. Pour tout $z \in U$, nous considérerons les deux suites $P(z) = (h^n(z))$ et $Q(z) = (h^{-n}(z))$, où $n \in \mathbb{N}$, dont la réunion constitue l'orbite de z. Rappelons qu'on appelle valeur d'adhérence d'une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, tout élément de $\mathbb{C}$ qui est limite d'une sous-suite de (z_n).

1. Soit $z_0 \in U$. Considérons des éléments m, n de $\mathbb{N}$ avec $m < n$ et $J = [h^m(z_0), h^n(z_0)]$.

 Montrer que pour k assez grand, les arcs de cercle adjacents J, $h^{m-n}(J)$, $h^{2(m-n)}(J)$, ..., $h^{k(m-n)}(J)$ recouvrent U.

 En déduire que pour tout $z_1 \in U$, l'intersection de $P(z_1)$ avec J est non vide. Montrer de même que l'intersection de $Q(z_1)$ avec J est non vide.

2. Soient z_0 et z_1 deux éléments distincts de U. Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite $P(z_0)$ est aussi une valeur d'adhérence de chacune des suites $P(z_1)$ et $Q(z_1)$.

 Montrer de même que toute valeur d'adhérence de la suite $Q(z_0)$ est une valeur d'adhérence de chacune des suites $P(z_1)$ et $Q(z_1)$.

3. D'après 2., l'ensemble X des valeurs d'adhérence de la suite $P(z)$ est le même pour tous les éléments z de U. Il ne dépend donc que de $h \in H$.

 a. Montrer que X est une partie fermée de U, invariante par h (telle que $h(X) = X$).

 b. Montrer que X n'a pas de point isolé, c'est-à-dire que tout point z de X est limite d'une suite de points distincts de X.

 c. Montrer que cette partie fermée X de U, invariante par h est minimale dans le sens suivant : si une partie fermée Y de X est invariante par h, non vide, alors Y = X.

4. Si X est distinct de U, on veut montrer que X n'est nulle part dense dans U, c'est-à-dire ne contient aucun arc $J = [z_1, z_2]$, où $z_1 \neq z_2$, de U.

 Supposons au contraire qu'un tel arc $J = [z_1, z_2]$ soit contenu dans X.

 Soit $z_0 \in U$. Montrer qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$ tels que l'arc $J_0 = [h^m(z_0), h^n(z_0)]$ soit contenu dans X. En considérant la réunion de J_0, $h^{n-m}(J_0)$, ..., $h^{k(n-m)}(J_0)$, montrer que X = U.

5. Si X est distinct de U, montrer que h ne peut pas être conjugué de la rotation R_α d'angle $2\pi\alpha$.

FIN