

Corrigé - Concours Centrale-Supélec 2015
TSI - Mathématiques 2

I.A. Soient $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\|AX\|^2 = (AX)^T AX = X^T A^T A X \text{ or } A^T A = (a^2 + b^2)I_2 \text{ donc } \|AX\|^2 = (a^2 + b^2)\|X\|^2$$

Ainsi : $A \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \forall X \in M_{2,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq \|X\|$

$$\Leftrightarrow \forall X \in M_{2,1}(\mathbb{R}), \sqrt{a^2 + b^2} \|X\| \leq \|X\|$$

Condition nécessaire :

$$A \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow \text{pour } X \neq 0_{M_{2,1}(\mathbb{R})}, \sqrt{a^2 + b^2} \|X\| \leq \|X\|$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1 \text{ car } \|X\| > 0$$

$$A \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1 \text{ car } \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \text{ et la fonction carré est croissante sur } [0; +\infty[$$

Condition suffisante :

$$a^2 + b^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1 \text{ car } a^2 + b^2 \geq 0 \text{ et racine carrée est croissante sur } [0; +\infty[$$

$$\Rightarrow \forall X \in M_{2,1}(\mathbb{R}), \sqrt{a^2 + b^2} \|X\| \leq \|X\| \text{ car } \|X\| \geq 0$$

i.e. $a^2 + b^2 \leq 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{E}_2$

Condition nécessaire et suffisante : $A \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 1$

I.B. Soit λ une valeur propre réelle de M et X un vecteur propre associé à λ .

$$\|MX\| = |\lambda| \|X\| = \lambda \|X\|$$

Si $M \in \mathcal{E}_n$ alors $\|MX\| \leq \|X\|$ ainsi $|\lambda| \|X\| \leq \|X\|$ et comme $\|X\| > 0$ on a : $|\lambda| \leq 1$

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \det(3XI_3 - 3A) = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 3X-1 & 1 & -2 \\ 1 & 3X-2 & -1 \\ -2 & -2 & 3X+2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 3X-2 & 1 & -2 \\ 3X-2 & 3X-2 & -1 \\ 3X-2 & -2 & 3X+2 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \frac{1}{27} (3X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3X-2 & -1 \\ 1 & -2 & 3X+2 \end{vmatrix} \text{ par linéarité par rapport à } C_1$$

$$= \frac{1}{27} (3X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3X-3 & 1 \\ 0 & -3 & 3X+4 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{27} (3X-2) \begin{vmatrix} 3X-3 & 1 \\ -3 & 3X+4 \end{vmatrix} \text{ par développement selon } C_1$$

$$= \frac{1}{27} (3X-2) ((3X-3)(3X+4)+3) = \frac{1}{27} (3X-2)(9X^2+3X-9)$$

$$= \left(X - \frac{2}{3}\right) \left(X^2 + \frac{1}{3}X - 1\right)$$

$$\text{Soit } \Delta = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = \frac{1}{9} + 4 = \frac{37}{9}$$

$$\chi_A(X) = \left(X - \frac{2}{3}\right) \left(X - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) + \sqrt{\frac{37}{9}}}{2}\right) \left(X - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) - \sqrt{\frac{37}{9}}}{2}\right)$$

$$= \left(X - \frac{2}{3}\right) \left(X - \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}\right) \left(X - \frac{-1 - \sqrt{37}}{6}\right)$$

$$\text{Ainsi } Sp(A) = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}; \frac{-1 - \sqrt{37}}{6} \right\}$$

or par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{36} < \sqrt{37}$ donc $6 < \sqrt{37}$

$$\text{Ainsi } \left| \frac{-1 - \sqrt{37}}{6} \right| = \frac{1 + \sqrt{37}}{6} > \frac{1+6}{6} = \frac{7}{6} > 1 \text{ donc } A \notin \mathcal{E}_3$$

I.C. Soient $(A; B) \in (\mathcal{E}_n)^2$ et $t \in [0; 1]$, $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

D'après l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$, on a :

$$\|(1-t)A + tB\|X\| = \|(1-t)AX + tBX\| \leq \|(1-t)AX\| + \|tBX\| \quad (1)$$

or la norme étant absolument homogène $\begin{cases} \|(1-t)AX\| = (1-t)\|AX\| \\ \|tBX\| = t\|BX\| \end{cases}$

de plus ici $t \in [0; 1]$ donc $\begin{cases} t \geq 0 \\ 1-t \geq 0 \end{cases}$ ainsi $\begin{cases} |t| = t \\ |1-t| = 1-t \end{cases}$

$$\text{Ainsi, (1) est : } \|(1-t)A + tB\|X\| \leq (1-t)\|AX\| + t\|BX\| \quad (1bis)$$

enfin $\begin{cases} \|AX\| \leq \|X\| \\ \|BX\| \leq \|X\| \end{cases}$ donc $\begin{cases} (1-t)\|AX\| \leq (1-t)\|X\| \text{ car } 1-t \geq 0 \\ t\|BX\| \leq t\|X\| \text{ car } t \geq 0 \end{cases}$

et par sommation $(1-t)\|AX\| + t\|BX\| \leq (1-t)\|X\| + t\|X\| = \|X\| \quad (2)$

Enfin par transitivité de \leq , (1bis) et (2) donnent : $\|(1-t)A + tB\|X\| \leq \|X\|$

Ce qui signifie que $(1-t)A + tB \in \mathcal{E}_n$

Ce raisonnement étant valide pour tout $t \in [0; 1]$, l'ensemble \mathcal{E}_n est convexe

I.D. Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ alors $M^T M = \left(\sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$(N(M))^2 = \text{tr}(M^T M) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (m_{k,j})^2 = \sum_{j=1}^n \|C_j\|^2 \text{ car } \forall j \in [1; n], C_j = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

On a donc
$$N(M) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j})^2}$$

I.E. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N(M) \leq 1$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $MX = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$

$$\|MX\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i C_i \sum_{j=1}^n x_j C_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i C_i x_j C_j)$$
 par bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall (i; j) \in [1; n]^2$,

$$(x_i C_i x_j C_j) \leq \|x_i C_i\| \times \|x_j C_j\| = |x_i x_j| \times \|C_i\| \times \|C_j\|$$

Donc
$$\|MX\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(|x_i| \times \|C_i\| \sum_{j=1}^n |x_j| \times \|C_j\| \right) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \times \|C_i\| \right)^2 \quad (1)$$

or l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n donne aussi : $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}$

Donc
$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \times \|C_i\| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \times \sum_{i=1}^n \|C_i\|^2 = \|X\|^2 \times (N(M))^2 \leq \|X\|^2 \quad (2)$$
 car $N(M) \leq 1$

Par transitivité de \leq , les inégalités (1) et (2) donnent : $\|MX\|^2 \leq \|X\|^2$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{\|MX\|^2} \leq \sqrt{\|X\|^2}$

et comme $\begin{cases} \|MX\| \geq 0 \\ \|X\| \geq 0 \end{cases}$ on a $\begin{cases} \sqrt{\|MX\|^2} = \|MX\| \\ \sqrt{\|X\|^2} = \|X\| \end{cases}$ donc $\|MX\| \leq \|X\|$ donc $M \in \mathcal{E}_n$

Ce raisonnement étant valide pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N(M) \leq 1$,

la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ est incluse dans \mathcal{E}_n .

I.F. Soient $M \in \mathcal{E}_n$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; ... ; $X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

On a : $MX_i = C_i$ donc $\|C_i\| = \|MX_i\| \leq \|X_i\| = 1$

ainsi par croissance de la fonction carré sur $[0; +\infty[$, $\|C_i\|^2 \leq 1^2 = 1$

Et par sommation : $\sum_{i=1}^n \|C_i\|^2 \leq n$ d'où $N(M)^2 \leq n$

Enfin par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $N(M) \leq \sqrt{n}$

Ainsi M appartient à la boule fermée de centre $0_{M_n(\mathbb{R})}$ et de rayon \sqrt{n} .

Ce raisonnement étant valide pour toute matrice $M \in \mathcal{E}_n$,

l'ensemble \mathcal{E}_n est inclus dans la boule fermée de centre $0_{M_n(\mathbb{R})}$ et de rayon \sqrt{n} .

Pour le cas $n=3$, d'après I.B. $A \in \mathcal{E}_3$ or $N(A) = \frac{1}{3} \sqrt{6+9+9} = \frac{1}{3} \sqrt{24} = \sqrt{\frac{8}{3}} \leq \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}$

A appartient à la boule fermée de centre $0_{M_n(\mathbb{R})}$ et de rayon $\sqrt{3}$

Ainsi, l'inclusion de \mathcal{E}_3 dans la boule fermée de centre $0_{M_n(\mathbb{R})}$ et de rayon $\sqrt{3}$ est donc stricte (il n'y a pas égalité des deux ensembles).

I.G. Soit $A \in M_n$ symétrique réelle, d'après le théorème spectral, toutes les valeurs propres de A sont réelles. Ainsi I.B donne : $A \in \mathcal{E}_n \Rightarrow Sp(A) \subset [-1; 1]$

Réciproquement, le théorème spectral assure l'existence de $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$ telle que $A = PDP^T$ alors pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|AX\|^2 = \|PDP^T X\|^2 = (PDP^T X)^T (PDP^T X) = X^T P D^T P^T P D P^T X$$
 or $P^{-1} = P^T$ donc $\|AX\|^2 = (DP^T X)^T (DP^T X) = \|DP^T X\|^2$

Soit $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a : $DP^T X = DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$ donc $\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 (y_i)^2$

Si $Sp(A) \subset [-1; 1]$ alors $\forall i \in [1; n]$, $(\lambda_i)^2 \leq 1$ donc $(\lambda_i)^2 (y_i)^2 \leq (y_i)^2$ car $(y_i)^2 \geq 0$

et par sommation $\sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 (y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (y_i)^2$

C'est-à-dire : $\|AX\|^2 \leq \|Y\|^2$

Enfin $\|Y\|^2 = \|P^T X\|^2 = (P^T X)^T P^T X = X^T P P^T X = X^T X = \|X\|^2$

Donc $\|AX\|^2 \leq \|X\|^2$ et par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$

$\sqrt{\|AX\|^2} \leq \sqrt{\|X\|^2}$ et comme $\begin{cases} \|AX\| \geq 0 \\ \|X\| \geq 0 \end{cases}$ on a : $\|AX\| \leq \|X\|$

Ce raisonnement étant valide pour toute $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $Sp(A) \subset [-1; 1] \Rightarrow A \in \mathcal{E}_n$.

I.H. $A^T = (B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B = A$ donc A est symétrique réelle ainsi, d'après le théorème spectral $Sp(A) \subset \mathbb{R}$

Soit $\lambda \in Sp(A)$ et X_λ un vecteur propre de A associé à λ

$(X_\lambda^T A X_\lambda) = (X_\lambda^T \lambda X_\lambda) = \lambda \|X_\lambda\|^2$

$(X_\lambda^T A X_\lambda) = (X_\lambda^T B^T B X_\lambda) = (X_\lambda^T)^T B^T B X_\lambda = (B X_\lambda)^T B X_\lambda = \|B X_\lambda\|^2$

ainsi $\lambda = \frac{\|B X_\lambda\|^2}{\|X_\lambda\|^2}$ car $\|X_\lambda\|^2 \neq 0$

donc $\lambda \geq 0$

Ce raisonnement étant valide $\forall \lambda \in Sp(A)$, on a démontré que $Sp(A) \subset [0; +\infty[$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|BX\|^2 = (BX)^T BX = X^T B^T B X = X^T A X$

or donc le théorème spectral assure l'existence de $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$ où

$\{\lambda_i | i \in [1; n]\} = Sp(A)$ telle que $A = PDP^T$

D'où : $\|BX\|^2 = X^T P D P^T X = (P^T X)^T D P^T X$

Soit $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a : $\|BX\|^2 = Y^T D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i)^2$

De plus $\|Y\| = \|X\|$

Si $B \in \mathcal{E}_n$ alors en particulier pour $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteurs de la base canonique

de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a : $\forall i \in [1; n], \begin{cases} \|BPY_i\| = \lambda_i \\ \|BPY_i\| \leq \|PY_i\| = \|Y_i\| = 1 \end{cases}$ donc $\lambda_i \leq 1$

Réciproquement : si $\forall i \in [1; n] \lambda_i \leq 1$ alors pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a $\lambda_i (y_i)^2 \leq (y_i)^2$ car $(y_i)^2 \geq 0$

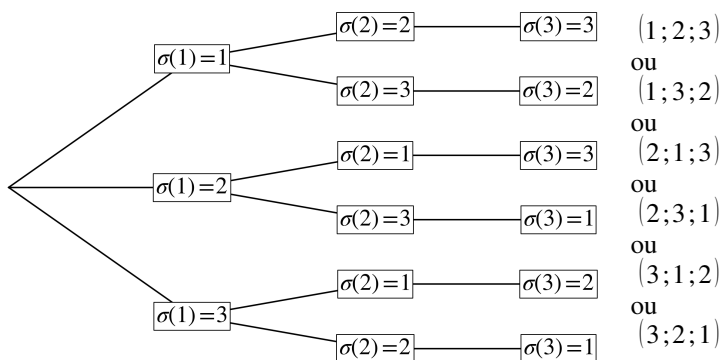
Donc par sommation $\sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (y_i)^2$ C'est-à-dire $\|BX\|^2 \leq \|Y\|^2 = \|X\|^2$

Ce raisonnement étant valide $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $B \in \mathcal{E}_n$.

Conclusion : $B \in \mathcal{E}_n \Leftrightarrow Sp(A) \subset]-\infty; 1]$

De plus puisque $Sp(A) \subset [0; +\infty[$, on a aussi : $B \in \mathcal{E}_n \Leftrightarrow Sp(A) \subset [0; 1]$

II.A.1) Choix successifs pour $\sigma(1)$, $\sigma(2)$ et $\sigma(3)$: Ainsi $(\sigma(1); \sigma(2); \sigma(3)) = \dots$



II.A.2) Soit χ_L le polynôme caractéristique de L

$$\chi_L(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X & 0 \\ X-1 & -1 & X \end{vmatrix} = C_1 - C_2 + C_3$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & X & 0 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & X & 1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \begin{cases} L_2 - L_2 - L_1 \\ L_3 - L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix} \text{ par développement selon la première colonne} \\ = (X-1)(X(X+1)+1) = (X-1)(X^2+X+1)$$

$$\chi_L(X) = (X-1) \left(X + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \left(X + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$\chi_L(X)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$

donc L est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$

$$Sp(L) = \left\{ 1; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\} = \left\{ 1; e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right\}$$

II.A.3) $L^T L = I_3$ et $\det(L) = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ par développement selon la première colonne

donc $L \in \mathcal{SO}(3)$ ainsi L est la matrice, dans une base orthonormale, d'une rotation d'angle $\theta[2\pi]$ selon un axe dirigé par un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (c'est-à-dire un vecteur invariant).

Ainsi en fixant par exemple M comme étant la matrice, dans la même base orthonormale, de la rotation d'angle $\frac{\theta}{3}[2\pi]$ selon le même axe que précédemment, on

$$\text{obtient : } \begin{cases} M \in \mathcal{SO}(3) \\ M^3 = L \end{cases}$$

Plus généralement, soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = L$

$$R \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } \chi_M(X) = X^3 + R(X) \text{ donc } \begin{cases} t \mapsto \chi_M(t) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \chi_M(t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \chi_M(t) = -\infty \end{cases}$$

d'après le théorème de valeurs intermédiaires $\chi_M(X)$ admet (au moins) une racine réelle λ .

Soit U_λ un vecteur propre de M associé à λ alors $MU_\lambda = \lambda U_\lambda$

$$\text{Ainsi } M^3 U_\lambda = M^2(MU_\lambda) = M^2(\lambda U_\lambda) = \lambda M^2 U_\lambda = \lambda M(MU_\lambda) = \lambda^2 M U_\lambda = \lambda^3 U_\lambda$$

Donc U_λ est un vecteur propre de L associé à λ^3 .

En notant $E_\lambda(M) = \text{Ker}(\lambda I_n - M)$, on vient de démontrer que $E_\lambda(M) \subset E_{\lambda^3}(M^3)$

Or la seule valeur propre réelle de L est 1 ainsi $\lambda^3 = 1$

La fonction cube définie sur \mathbb{R} étant injective on a $\lambda = 1$

Donc $E_1(M) \subset E_1(L)$ or $\begin{cases} 1 \leq \dim(E_1(M)) \\ \dim(E_1(L)) = 1 \end{cases}$ donc $E_1(M) = E_1(L)$

Recherche des autres valeurs propres de M :

$\chi_M(1) = 0$ donc $\exists Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\chi_M(X) = (X-1)Q(X)$

Soit $\mu \in \mathbb{C}$ une racine de $Q(X)$ (le théorème fondamental de l'algèbre assure son existence).

► Supposons, par l'absurde que $\mu \in \mathbb{R}$ alors le raisonnement pour λ étant valable pour μ , la seule racine réelle possible pour $Q(X)$ est 1 ainsi $\chi_M(X) = (X-1)^3$.

$\chi_M(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc M est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi M^3 est semblable à $\begin{pmatrix} 1^3 & * & * \\ 0 & 1^3 & * \\ 0 & 0 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{Tr}(M^3) = 3$ ce qui est

absurde car $\text{Tr}(L) = 0$

► Donc $\mu \notin \mathbb{R}$ et $\bar{\mu}$ est aussi racine de $Q(X)$ car $Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$.

On a donc $\chi_M(X) = (X-1)(X-\mu)(X-\bar{\mu})$

$\chi_M(X)$ étant scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$

et ces 3 sous-espaces propres sont de dimension 1

Soient V_μ et $V_{\bar{\mu}}$ deux vecteurs propres de M associés respectivement à μ et $\bar{\mu}$.

Alors, comme pour U_λ , V_μ est un vecteur propre de M^3 associé à μ^3 .

Donc $\mu^3 \in \left\{ 1; e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right\}$ et $E_\mu(M) \subset E_{\mu^3}(L)$

Or $\dim(E_{\mu^3}(L)) = 1$ donc $E_\mu(M) = E_{\mu^3}(L)$

Supposons par l'absurde que $\mu^3 = 1$ alors $E_\mu(M) = E_1(L)$, absurde car $\mu \neq 1$ donc les deux sous-espaces propres sont en somme directe i.e. $E_\mu(M) + E_1(L) = E_\mu(M) \oplus E_1(L)$

Ainsi $\mu^3 \in \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right\}$

Le même raisonnement appliqué à $\bar{\mu}$ donne $\bar{\mu}^3 \in \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right\}$

Ainsi on peut fixer arbitrairement $\mu^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ quitte à échanger μ et $\bar{\mu}$.

On a donc $E_\mu(M) \subset E_{e^{i\frac{2\pi}{3}}}(L)$

Or $\dim(E_{e^{i\frac{2\pi}{3}}}(L)) = 1$ donc $E_\mu(M) = E_{e^{i\frac{2\pi}{3}}}(L)$

De même on a $E_{\bar{\mu}}(M) = E_{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}(L)$

Ainsi pour $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $L = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} P^{-1}$

On a $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} P^{-1}$ donc $M^3 = P \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^3 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}^3 \end{pmatrix} P^{-1}$

En multipliant les deux membres de l'égalité $M^3 = L$ par P^{-1} à gauche et P à droite on

$$a : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^3 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \mu^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \mu^3 = 1 \\ 3 \arg(\mu) = \frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\mu| = 1 \\ \arg(\mu) = \frac{2\pi}{9} \left[\frac{2\pi}{3} \right] \end{cases} \Rightarrow \mu \in \left\{ e^{i\frac{2\pi}{9}}; e^{i\frac{8\pi}{9}}; e^{i\frac{14\pi}{9}} \right\}$$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe 3 matrices } M \in M_3(\mathbb{R}) \text{ telles que } M^3 = L}$

Attention : obtenir un nombre fini de solution à une équation matricielle non linéaire n'est pas une généralité. Ici le fait que les dimensions des sous-espaces propres de L soient égales à 1 est crucial. Ce type de résultat n'est pas généralisable. Par exemple, il existe une infinité de matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = I_3$ puisque toute rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ convient quel que soit son axe (et il existe une infinité d'axes).

$$\text{II.A) } \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{O}(3) \text{ car deux vecteurs colonnes sont identiques.}$$

Donc $\boxed{[K, L] \notin \mathcal{O}(3)}$.

Si la notation M_σ signifie $M_\sigma \equiv \text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(f)$ avec $\forall i \in [1; 3], f(e_i) = e_{\sigma(i)}$

Alors $K = M_{\sigma_1}$ où $(\sigma_1(1); \sigma_1(2); \sigma_1(3)) = (2; 1; 3)$

et $L = M_{\sigma_2}$ où $(\sigma_2(1); \sigma_2(2); \sigma_2(3)) = (2; 3; 1)$

Ainsi $K^0 L^0 = M_{id}$

$$K^0 L^2 = L^2 = M_{(\sigma_2)^2} \text{ et } ((\sigma_2)^2(1); (\sigma_2)^2(2); (\sigma_2)^2(3)) = (3; 1; 2)$$

$$KL = M_{\sigma_1 \circ \sigma_2} \text{ et } (\sigma_1 \circ \sigma_2(1); \sigma_1 \circ \sigma_2(2); \sigma_1 \circ \sigma_2(3)) = (1; 3; 2)$$

$$KL^2 = M_{\sigma_1 \circ (\sigma_2)^2} \text{ et } (\sigma_1 \circ (\sigma_2)^2(1); \sigma_1 \circ (\sigma_2)^2(2); \sigma_1 \circ (\sigma_2)^2(3)) = (3; 2; 1)$$

Les 6 permutations constituant S_3 sont décrites donc on a bien :

$$\{K^r L^h | r \in \{0; 1\}, h \in \{0; 1; 2\}\} = \{M_{\sigma} | \sigma \in S_3\}$$

II.A.5) D'après les compositions de permutations précédentes on a :

$$\{M_{\sigma} | \sigma \in S_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Soit $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \alpha_5; \alpha_6) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_6 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_6 & \alpha_4 + \alpha_5 \\ \alpha_4 + \alpha_6 & \alpha_2 + \alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_6 = -\alpha_3 = \alpha_5 = -\alpha_4$$

$$f: \mathbb{R}^6 \rightarrow M_3(\mathbb{R})$$

Soit

$$(\alpha_{\sigma})_{\sigma \in S_3} \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_{\sigma} M_{\sigma}$$

Le système précédent donne $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ (un seul degré de liberté)

Le théorème du rang appliqué à f donne : $\dim(\mathbb{R}^6) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$

Ainsi $\text{rg}(f) = 5$ donc $\dim(\text{Vect}(\{M_{\sigma} | \sigma \in S_3\})) = 5$

II.B.1) $M_{\sigma} e_j$ est la j -ième colonne de M_{σ} donc les colonnes de M_{σ} sont des

permutations des vecteurs de la base canonique, elles forment ainsi une base

orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ainsi $\{M_{\sigma} | \sigma \in \mathcal{O}(n)\}$

Plus précisément on a $M_{\sigma} = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

II.C) Attention : S_n n'est pas un espace vectoriel donc les résultats sur les applications linéaires sont hors-sujet.

Soit $(\sigma; \sigma') \in (S_3)^2$ tel que $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma')$ alors $M_{\sigma} = M_{\sigma'}$,

donc $\forall j \in [1; n]$, $M_{\sigma} e_j = M_{\sigma'} e_j$

Ainsi $\forall j \in [1; n]$, $e_{\sigma(j)} = e_{\sigma'(j)}$

Donc, les éléments la base canonique étant différents 2 à 2 : $\forall j \in [1; n]$, $\sigma(j) = \sigma'(j)$

Donc $\sigma = \sigma'$

Ce qui prouve que φ est injective.

Remarque : l'opération \circ n'ayant pas de sens dans $M_n(\mathbb{R})$ il faut comprendre qu'on cherche à démontrer que $\varphi(\sigma \circ \sigma') = \varphi(\sigma) \times \varphi(\sigma')$ c'est-à-dire $M_{\sigma \circ \sigma'} = M_{\sigma} \times M_{\sigma'}$.

Par définition de M_{σ} , $M_{\sigma'}$ et $M_{\sigma \circ \sigma'}$,

$$\forall j \in [1; n], M_{\sigma \circ \sigma'}(e_j) = M_{\sigma}(M_{\sigma'} e_j) = M_{\sigma} e_{\sigma'(j)} = e_{\sigma(\sigma'(j))} = e_{\sigma \circ \sigma'(j)} = M_{\sigma \circ \sigma'} e_j$$

Ce qui définit les n colonnes des matrices $M_{\sigma} \times M_{\sigma'}$ et $M_{\sigma \circ \sigma'}$ donc

$$M_{\sigma \circ \sigma'} = M_{\sigma} \times M_{\sigma'}$$

Bonus : un code Python générant les éléments de \mathcal{P}_n et vérifiant II.A.5)

```

1 def S(n):
2     Liste_i_uplets=[]
3     for i in range(1,n+1): #création des i-uplets sans répétition
4         Nouvelle_liste=[]
5         for i_uplet in Liste_i_uplets: # à partir des (i-1)-uplets
6             for k in range(1,n+1):
7                 if k not in i_uplet :
8                     Nouvelle_liste.append(i_uplet+[k])
9         Liste_i_uplets=Nouvelle_liste
10    return Liste_i_uplets
11
12 import numpy as np
13 def P(n):
14     L=[]
15     for permutation in S(n):
16         L.append(np.array([int(i==permutation[j-1]) for j in range(1,n+1)] for i in range(1,n+1)))
17    return L
18
19 for M in P(3):
20     print(M)
21
22 Coordonnées=[]
23 for M in P(3):
24     Coordonnées.append(list(np.reshape(M,9)))
25 Coordonnées=np.transpose(Coordonnées)
26 print(np.linalg.matrix_rank(Coordonnées))

```

II.C.1 Puisque \mathcal{P}_n est un sous-groupe, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(M_{\sigma})^k \in \mathcal{P}_n$

Donc $\{(M_{\sigma})^k | k \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathcal{P}_n$

Et comme \mathcal{P}_n est fini, $\{(M_{\sigma})^k | k \in \mathbb{N}^*\}$ est fini.

Ainsi d'après le principe des tiroirs (en rangeant $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, au moins un tiroir contient au moins une paire de chaussettes, autrement dit si

Card(A) > Card(B) alors $f : A \rightarrow B$ ne peut pas être injective :

$\exists (k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $k < k'$ tel que : $(M_\sigma)^k = (M_\sigma)^{k'}$ (a)

Soit $p = k' - k \in \mathbb{N}^*$ alors $(M_\sigma)^p \in \{(M_\sigma)^k | k \in \mathbb{N}^*\}$

or $(M_\sigma)^k ((M_\sigma)^p - I_n) = (M_\sigma)^{k+p} - (M_\sigma)^k = (M_\sigma)^{k'} - (M_\sigma)^k = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ d'après (a)

Et comme $(M_\sigma)^k \in \mathcal{O}(n)$, $(M_\sigma)^k$ est inversible donc : $(M_\sigma)^p - I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

C'est-à-dire $(M_\sigma)^p = I_n$

III.A. Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{P}_n$ alors $\exists \sigma \in S_n$ tel que $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $i \in [1; n]$, $\sum_{k=1}^n m_{i,k} = m_{i, \sigma^{-1}(i)} = 1$ et $\sum_{k=1}^n m_{k,i} = m_{\sigma(i); i} = 1$ donc $M \in \Pi_n$

Ce raisonnement étant valide pour tout $M \in \mathcal{P}_n$, on a : $\mathcal{P}_n \subset \Pi_n$

III.B. Par définition, $H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} U = 0 \right\} = (\text{Vect}(U))^\perp = D^\perp$

Ainsi, puisque $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie : $M_{n,1}(\mathbb{R}) = H \oplus D$

III.C.1) En notant $J = (J_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda J = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \dots & \lambda \end{pmatrix}$

$MJ = \left(\sum_{k=1}^n m_{i,k} J_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\sum_{k=1}^n m_{i,k} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ainsi $MJ = \lambda J \Leftrightarrow \forall i \in [1; n], \sum_{k=1}^n m_{i,k} = \lambda$

$JM = \left(\sum_{k=1}^n J_{i,k} m_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\sum_{k=1}^n m_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ainsi $JM = \lambda J \Leftrightarrow \forall j \in [1; n], \sum_{k=1}^n m_{k,j} = \lambda$

Ainsi M est magique si et seulement si $\exists \lambda = s(M)$ tel que $MJ = JM = \lambda J$

III.C.2) Soient $(H_1; \dots; H_{n-1})$ une base de H.

M laisse stables D et H si et seulement si $\begin{cases} MU \in D \\ \forall j \in [1; n-1], MH_j \in H \end{cases}$

Or, on remarque que $H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid J \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = 0_{M_n(\mathbb{R})} \right\} = \text{Ker}(J)$

Ainsi :

M laisse stables D et H $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} MU = \lambda U \\ \forall j \in [1; n-1], JM H_j = 0_{M_n(\mathbb{R})} \end{cases}$

Or, chaque colonne de l'égalité $MJ = \lambda J$ est $MU = \lambda U$, ainsi :

M laisse stables D et H $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} MJ = \lambda J \\ JMU = \lambda JU \\ \forall j \in [1; n-1], JM H_j = 0_{M_n(\mathbb{R})} = \lambda J H_j \end{cases}$

Or, d'après III.B) $D \oplus H = M_{n,1}(\mathbb{R})$ ainsi, par juxtaposition des bases $(U; H_1; \dots; H_{n-1})$ forme une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\begin{cases} JMU = \lambda JU \\ \forall j \in [1; n-1], JM H_j = \lambda J H_j \end{cases} \Leftrightarrow JM = \lambda J$

D'où : M laisse stables D et H $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} MJ = \lambda J \\ JM = \lambda J \end{cases}$

Ainsi, d'après III.C.1) : M laisse stables D et H $\Leftrightarrow M$ est magique

III.C.3) $0_{M_n(\mathbb{R})} \in \Pi_n$ car $0_{M_n(\mathbb{R})}$ laisse stables D et H

Soient $(M, M') \in (\Pi_n)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

Par distributivité, $(\alpha M + M')U = \alpha MU + M'U$

or M et M' laissent stable D donc $\begin{cases} MU \in D \\ M'U \in D \end{cases}$

or D est un sous-espace vectoriel donc $\alpha MU + M'U \in D$

Donc $\alpha M + M'$ laisse stable D

De même $\forall j \in [1; n-1], (\alpha M + M')H_j = \alpha M H_j + M' H_j$ or M et M' laissent stable H

donc $\begin{cases} M H_j \in H \\ M' H_j \in H \end{cases}$ et comme H est un sous-espace vectoriel $\alpha M H_j + M' H_j \in H$

Donc $\alpha M + M'$ laisse stable H

Conclusion : $\alpha M + M' \in \Pi_n$

Ce raisonnement étant valide $\forall (M, M') \in (\Pi_n)^2$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

Π_n est un sous-espace vectoriel.

Soient $(M, M') \in (\Pi_n)^2$.

Par associativité du produit matriciel, $(MM')U = M(M'U)$

or M' laisse stable D donc $M'U \in D$

et comme M laisse stable D, $M(M'U) \in D$

Ainsi MM' laisse stable D.

De même $\forall j \in [1; n-1], (MM')H_j = M(M' H_j) \in H$ donc MM' laisse stable H

Conclusion : $MM' \in \Pi_n$

Ce raisonnement étant valide $\forall (M, M') \in (\Pi_n)^2$, Π_n est stable par multiplication

III.C.4) D'après III.C.1) $\left. \begin{matrix} M \text{ est magique} \\ s(M) = \lambda \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow MJ = JM = \lambda J$

Soient $(M, M') \in (\Pi_n)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 (\alpha M + M')J &= \alpha MJ + M'J = \alpha s(M)J + s(M')J = (\alpha s(M) + s(M'))J \\
 J(\alpha M + M') &= \alpha JM + JM' = \alpha s(M)J + s(M')J = (\alpha s(M) + s(M'))J \\
 \text{donc } s(\alpha M + M') &= \alpha s(M) + s(M')
 \end{aligned}$$

Ce raisonnement étant valide $\forall (M, M') \in (\Pi_n)^2$, s est linéaire.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 (MM')J &= M(M'J) = M(s(M')J) = s(M')MJ \text{ car } s(M') \in \mathbb{R} \\
 &= s(M')s(M)J = s(M)s(M')J
 \end{aligned}$$

$$\text{et } J(MM') = (JM)M' = (s(M)J)M' = s(M)JM' = s(M)s(M')J$$

$$\text{Donc } s(MM') = s(M)s(M')$$

III.C.5) Soit M magique et inversible

$$\text{alors } \begin{cases} MJ = s(M)J \\ JM = s(M)J \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} M^{-1}MJ = s(M)M^{-1}J \\ JMM^{-1} = s(M)JM^{-1} \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} J = s(M)M^{-1}J \\ J = s(M)JM^{-1} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } s(M) \neq 0 \text{ car } J \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ donc } \begin{cases} \frac{1}{s(M)}J = M^{-1}J \\ \frac{1}{s(M)}J = JM^{-1} \end{cases}$$

$$\text{Donc } M^{-1} \text{ est magique et } s(M^{-1}) = \frac{1}{s(M)}$$

III.D D'après la formule de changement de base et la caractérisation des matrices laissant stables des sous-espaces vectoriels en notant $P = (U \ H_1 \ \dots \ H_n) \in M_n(\mathbb{R})$ définies par ses vecteurs colonnes on a, d'après III.C.2)

M est magique si et seulement si $\exists a_{1,1} \in \mathbb{R}$ et $\exists (a_{i,j})_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ tels que

$$M = P \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ce qui laisse $1 + (n-1)^2$ degrés de liberté donc $\dim(\Pi_n) = n^2 - 2n + 2$

III.E Soit $HR(k) : \ll J^k \in \Pi_n \gg$

Initialisation : $J^0 = I_n$ or $I_n J = 1 J = J I_n$ donc $J^0 \in \Pi_n$ ainsi $HR(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $HR(k)$ soit vraie.

$$J^{k+1} = J J^k \text{ or } J \in \Pi_n \text{ car } J J = J J = n J$$

de plus $J^k \in \Pi_n$ d'après $HR(k)$ donc par stabilité de Π_n pour le produit matriciel,

$$J^{k+1} \in \Pi_n \text{ donc } HR(k+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, J^k \in \Pi_n$.

$$\text{Soient } (\alpha; \beta; \alpha'; \beta') \in \mathbb{R}^4 \text{ et } \begin{cases} Z_{\alpha, \beta} = \alpha I_n + \beta J_n \\ Z_{\alpha', \beta'} = \alpha' I_n + \beta' J \end{cases}$$

$$Z_{\alpha, \beta} \times Z_{\alpha', \beta'} = (\alpha I_n + \beta J)(\alpha' I_n + \beta' J) = \alpha \alpha' I_n + (\alpha \beta + \alpha' \beta') J + \beta \beta' J^2 = \alpha \alpha' I_n + (\alpha \beta + \alpha' \beta' + \beta \beta' n) J \in Vect(I_n, J)$$

Ce raisonnement étant valable $\forall (\alpha; \beta; \alpha'; \beta') \in \mathbb{R}^4$,

$Vect(I_n, J)$ est stable pour le produit matriciel.

III.F Soit $C_n = \{M \in \Pi_n \mid \forall A \in \Pi_n, AM = MA\}$ le centre des matrices magiques.

$$\forall A \in \Pi_n, A I_n = I_n A \text{ donc } I_n \in C_n$$

$$\forall A \in \Pi_n, A J = J A \text{ donc } J \in C_n$$

Démontrons que C_n est un sous-espace vectoriel :

$$\text{Soient } (M, M') \in (C_n)^2 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \Pi_n, (\lambda M + M')A = \lambda MA + M'A$$

$$\text{or } \begin{cases} MA = AM \\ M'A = AM' \end{cases} \text{ donc } (\lambda M + M')A = \lambda AM + AM' = A(\lambda M + M')$$

$$\text{Donc } \lambda M + M' \in C_n$$

Ce raisonnement étant valide $\forall (M, M') \in (C_n)^2$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, C_n est un sous-espace vectoriel.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} I_n \in C_n \\ J \in C_n \end{cases} \Rightarrow Vect(I_n, J) \subset C_n$$

Inclusion réciproque :

Soit $M \in C_n$ alors, en particulier, puisque d'après III.A $\mathcal{P}_n \subset \Pi_n$,

$$\text{pour } (k; l) \in [1; n]^2, \text{ on a : } P_{k,l} M = M P_{k,l}$$

$$\text{Soit } \sigma \text{ la permutation élémentaire échangeant } k \text{ et } l \text{ i.e. } \begin{cases} \sigma(k) = l \\ \sigma(l) = k \\ \sigma(i) = i \text{ si } i \notin \{k; l\} \end{cases}$$

$$\text{or } P_{k,l} M \text{ échange les lignes } k \text{ et } l \text{ de } M \text{ donc : } P_{k,l} M = (m_{\sigma(i), j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{et } M P_{k,l} \text{ échange les colonnes } k \text{ et } l \text{ de } M \text{ donc : } M P_{k,l} = (m_{i, \sigma(j)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{Ainsi } \forall (i; j) \in [1; n]^2, m_{\sigma(i), j} = m_{i, \sigma(j)} (*)$$

Remarque : σ étant une bijection de $[1; n]$ dans lui-même, on a : $m_{i, j} = m_{\sigma^{-1}(i), \sigma(j)}$

En comme σ est ici une permutation élémentaire on a $\sigma^{-1} = \sigma$ donc $m_{i, j} = m_{\sigma(i), \sigma(j)}$

Cette dernière égalité est peut-être plus facile à manipuler que (*) mais n'étant pas nécessaire pour conclure, la suite de la démonstration n'utilise que (*).

► Soit $k \in [2; n]$ et σ la permutation élémentaire échangeant 1 et k .

L'égalité (*) pour $(i; j) = (1; k)$ donne : $m_{\sigma(k),1} = m_{k,\sigma(1)}$ donc $m_{1,1} = m_{k,k}$

Ce raisonnement étant valide $\forall k \in [2; n]$, tous les termes de la diagonale de M sont égaux.

► Soit $(i_0; j_0) \in [1; n]^2$ et σ_0 la permutation élémentaire échangeant i_0 et j_0 , l'égalité (*) appliquée à σ_0 en $(i; j) = (i_0; i_0)$ donne $m_{\sigma_0(i_0),i_0} = m_{i_0,\sigma_0(i_0)}$,

$$\text{c'est-à-dire } m_{j_0,i_0} = m_{i_0,j_0}$$

Ce raisonnement étant valide $\forall (i_0; j_0) \in [1; n]^2$, M est symétrique.

► Soit $(i_0; j_0) \in [1; n]^2$ tel que $i_0 < j_0$ alors on note

σ_1 la permutation élémentaire échangeant i_0 et 1

σ_2 la permutation élémentaire échangeant j_0 et 2

L'égalité (*) appliquée à σ_1 pour $(i; j) = (1; j_0)$ donne : $m_{\sigma_1(1),j_0} = m_{1,\sigma_1(j_0)}$

$$\text{donc } m_{i_0,j_0} = m_{1,\sigma_1(j_0)}$$

et comme $j_0 \notin \{1, i_0\}$, on a $\sigma_1(j_0) = j_0$ ainsi : $m_{i_0,j_0} = m_{1,j_0}$ (a)

L'égalité (*) appliquée à σ_2 pour $(i, j) = (1, j_0)$ donne : $m_{\sigma_2(1),j_0} = m_{1,\sigma_2(j_0)}$

or $1 \notin \{j_0; 2\}$ donc $\sigma_2(1) = 1$, ainsi $m_{1,j_0} = m_{1,2}$ (b)

Ainsi (a) et (b) donnent $m_{i_0,j_0} = m_{1,2}$

Ce raisonnement étant valide $\forall (i_0; j_0) \in [1; n]^2$ tel que $i_0 < j_0$, les termes de M situés strictement au dessus de sa diagonale sont tous égaux.

$$\text{Conclusion : } M \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \mid (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \beta J + (\alpha - \beta) I_n \text{ donc } M \in \text{vect}(I_n, J)$$

Ce raisonnement étant valide $\forall M \in C_n$, on a : $C_n \subset \text{vect}(I_n; J)$

Conclusion, par double inclusion on a $C_n = \text{vect}(I_n; J)$

III.G $s: \Pi_n \rightarrow \mathbb{R}$ et s est linéaire ainsi le théorème du rang assure :

$$\dim(\Pi_n) = \dim(\text{Ker}(s)) + \dim(\text{Im}(s))$$

Or, par exemple, $s(I_n) = 1$ donc $\text{Im}(s) = \mathbb{R}$ ainsi $\dim(\text{Ker}(s)) = \dim(\Pi_n) - 1$

Ainsi toute droite vectorielle de Π_n non incluse dans $\text{Ker}(s)$ est supplémentaire de $\text{Ker}(s)$ dans Π_n .

Par exemple, puisque $s(I_n) \neq 0$, $\text{Vect}(I_n) \cap \text{Ker}(s) = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$ donc $\text{Vect}(I_n)$ et $\text{Ker}(s)$

sont en somme directe.

Puisque $I_n \in \Pi_n$, on a : $\text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(s) \subset \Pi_n$

De plus $\dim(\text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(s)) = 1 + \dim(\text{Ker}(s)) = \dim(\Pi_n)$

Ainsi $\text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(s) = \Pi_n$

Autre méthode pour démontrer l'inclusion réciproque :

soit $M \in \Pi_n$, en notant $M' = M - s(M)I_n$ on a : $M = s(M)I_n + M'$

et $s(M') = s(M) - s(M)s(I_n)$ par linéarité de s car $s(M) \in \mathbb{R}$

donc $s(M') = 0$ donc $\Pi_n \subset \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(s)$

III.H.1) Sommes sur les lignes : $\forall i \in [1; n], \sum_{j=1}^n M_{i,j} = s(M)$

Sommes sur les colonnes : $\forall j \in [1; n], \sum_{i=1}^n M_{i,j} = s(M)$

Sommes sur les diagonales : $\sum_{k=1}^n M_{k,k} = s(M)$ et $\sum_{k=1}^n M_{k,n-k+1} = s(M)$

III.H.2) Puisque l'ensemble des matrices super-magiques est caractérisé par les solutions d'un système linéaire homogène, c'est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$

$$f: \Pi_n \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{Soit } M \mapsto \left(s(M) - \text{Tr}(M); s(M) - \sum_{k=1}^n M_{k,n-k+1} \right)$$

f est linéaire car $s()$ et $\text{Tr}()$ le sont. De plus $\text{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel des matrices super magiques et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\Pi_n) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

$$\text{D'où : } \dim(\text{Ker}(f)) = 1 + (n-1)^2 - \dim(\text{Im}(f))$$

Ainsi pour $n=3$ on a :

$$f(I_3) = (1-3; 1-1) = (-2; 0)$$

$$f(P_{1,3}) = (1-1; 1-3) = (0; -2)$$

Donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1+4-2=3$

Il suffit donc de trouver trois matrices super-magiques formant une famille libre

$$f(J) = (0; 0) \text{ donc } J \in \text{Ker}(f)$$

On pourrait sortir deux autres matrices super-magiques du chapeau... mais on peut être mathématicien sans être magicien !

Par exemple, d'après III.A, $P_{1,2} \in \Pi_n$ et $f(P_{1,2}) = (0; 1)$

$$\text{donc par linéarité } f\left(P_{1,2} + \frac{1}{2}P_{1,3}\right) = (0; 1) + \frac{1}{2}(0; -2) = (0; 0)$$

Ainsi $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est super-magique.

Autre exemple : $f(P_{2,3}) = (0;1)$ donc $f\left(P_{2,3} + \frac{1}{2}P_{1,3}\right) = (0;0)$

Ainsi : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est super-magique.

Par ailleurs, d'après III.C.3), Π_n est stable pour le produit matriciel donc $P_{1,3}P_{1,2} \in \Pi_n$

or $P_{1,3}P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $f(P_{1,3}P_{1,2}) = (1;0)$ donc $f\left(P_{1,3}P_{1,2} + \frac{1}{2}I_3\right) = (0;0)$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est super-magique.

Soit $F = \left(J; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha J + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

ainsi $\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ -3\beta = 0 \end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Ainsi F est libre et comme $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$, F est une base des matrices super-magiques.

Autre méthode du chapeau magique : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

est une famille de vecteurs de $\text{Ker}(f)$ orthogonale pour (\cdot, \cdot) donc libre.

Puisque $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ cette famille est une base des matrices super-magiques.

IV.A. Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{P}_n$ alors $\exists \sigma \in S_n$ telle que

$$\forall (i, j) \in [1; n]^2, m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $\forall (i, j) \in [1; n]^2, m_{i,j} \geq 0$ et d'après III.A) M est magique et $s(M) = 1$ donc M est bistochastique.

Ce raisonnement étant valide $\forall M \in \mathcal{P}_n$, on a : $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$

IV.B) Il existe des matrices bistochastiques non inversibles. Par exemple $\frac{1}{n}J$ est bistochastique et non inversible pour $n > 1$ car $rg(J) = 1 < n$

IV.C) Soient $(M; M') \in \mathcal{B}_n^2$, d'après III.C.3) $MM' \in \Pi_n$

D'après III.C.4) $s(MM') = s(M)s(M') = 1 \times 1 = 1$

Enfin $MM' = \left(\sum_{k=1}^n m_{i,k} m'_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

or $\forall (i, j, k) \in [1; n]^3, \begin{cases} m_{i,k} \geq 0 \\ m'_{k,j} \geq 0 \end{cases}$ alors $m_{i,k} m'_{k,j} \geq 0$ donc $\sum_{k=1}^n m_{i,k} m'_{k,j} \geq 0$

Donc $MM' \in \mathcal{B}_n$

Ce raisonnement étant valide $\forall (M; M') \in \mathcal{B}_n^2$,

l'ensemble \mathcal{B}_n est stable pour le produit matriciel.

IV.D Par définition de \mathcal{B}_n , on a : $\mathcal{B}_n \subset \Pi_n$

Comme Π_n est un sous-espace vectoriel on a donc : $\text{Vect}(\mathcal{B}_n) \subset \Pi_n$

Inclusion réciproque : soit $M \in \Pi_n$ si $M \in \text{Vect}(J)$ alors $M = s(M)J = s(M)n \frac{1}{n}J$

Or $n s(M) \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{n}J \in \mathcal{B}_n$ donc $M \in \text{Vect}(\mathcal{B}_n)$

Si $M \notin \text{Vect}(J)$ alors on pose $m = \min\{m_{i,j} \mid (i, j) \in [1, n]^2\}$ et on a ainsi

Les coefficients de $M - mJ$ tous positifs et $s(M) > nm$ donc :

$$M = M - mJ + mJ = (s(M) - mn) \frac{1}{s(M) - mn} (M - mJ) + mn \frac{1}{n}J$$

or Π_n étant un sous-espace vectoriel $\frac{1}{s(M) - mn} (M - mJ) \in \Pi_n$

De plus, s étant linéaire, $s\left(\frac{1}{s(M) - mn} (M - mJ)\right) = \frac{1}{s(M) - mn} (s(M) - m s(J)) = 1$

Donc $\frac{1}{s(M) - mn} (M - mJ) \in \mathcal{B}_n$

Ainsi $M \in \text{Vect}(\mathcal{B}_n)$

Ce raisonnement étant valide $\forall M \in \Pi_n$, on a $\Pi_n \subset \text{Vect}(\mathcal{B}_n)$

Conclusion : par double inclusion $\Pi_n = \text{Vect}(\mathcal{B}_n)$

IV.E.1) U_a est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral,

U_a est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

De plus $U_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in Sp(U_a)$

Et comme U_a est trigonalisable : $Tr(U_a) = \sum_{\lambda \in Sp(U_a)} \lambda m_\lambda$ où m_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ . Ainsi $Sp(U_a) = \{1; 2a-1\}$

$$\begin{aligned} \text{IV.E.2) } U_a \in \mathcal{O}(2) &\Leftrightarrow (U_a)^T U_a = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + (1-a)^2 & 2a(a-1) \\ 2a(a-1) & (1-a)^2 + a^2 \end{pmatrix} = I_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 2a + 1 = 1 \\ a(a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \{0; 1\} \end{aligned}$$

IV.E.3) D'après IV.D) $vect(\mathcal{B}_2) = \Pi_2$
Détermination d'une base de $vect(\mathcal{B}_2)$.

Soit $M \in vect(\mathcal{B}_2)$ alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M = \alpha U_a = \alpha a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $M \in vect\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Ainsi ce raisonnement étant valide $\forall M \in vect(\mathcal{B}_2)$,

$vect(\mathcal{B}_2) \subset vect\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Inclusion réciproque : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U_0$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = U_1 - U_0$ donc

$vect\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \subset vect(\mathcal{B}_2)$

Conclusion par double inclusion : $vect(\mathcal{B}_2) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car les deux matrices ne sont pas proportionnelles, c'est donc une base de $vect(\mathcal{B}_2)$.

IV.F.1) $V_b = (1-3b)I_3 + bJ$

Remarque : V_b étant symétrique réelle, V_b est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ mais pour connaître ses valeurs propres sans calculer les racines du polynôme caractéristique on utilise dans la suite un résultat sur les matrices de rang 1 et le théorème spectral devient inutile.

$rg(J) = 1$ donc $dim(\text{Ker } J) = 2$ ainsi $0 \in Sp(J)$ et l'ordre de multiplicité de la racine 0 pour χ_J est supérieur ou égal à 2 donc χ_J est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Ainsi J est trigonalisable et en notant λ la seconde valeur propre on a $Tr(J) = 2 \times 0 + \lambda$

Or $Tr(J) = 3$ donc J est semblable à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, par diagonalisation simultanée (I_3 étant invariante par changement de base) V_b

est semblable à : $(1-3b)I_3 + b \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3b & 0 \\ 0 & 0 & 1-3b \end{pmatrix}$

Donc $Sp(V_b) = \{1; 1-3b\}$

IV.F.2) $V_b \in \mathcal{O}(3) \Leftrightarrow sp(V_b) \subset \{-1; 1\} \Leftrightarrow 1-3b = 1$ ou $1-3b = -1$
 $\Leftrightarrow 3b = 0$ ou $3b = 2 \Leftrightarrow b = 0$ ou $b = \frac{2}{3}$

Or $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ donc seule $V_0 \in \mathcal{O}(3)$

IV.G.1) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in O(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = I_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + ac + cb = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a+b+c = 1 \text{ ou } a+b+c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a+b+c = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a+b+c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(a; b; c) \in (S \cap P_1) \cup (S \cap P_2)}$$

où S est la sphère unité, $P_1: x+y+z=1$ et $P_2: x+y+z=-1$

or $d(0_{\mathbb{R}^3}; P_1) = \frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ donc $S \cap P_1$ est le cercle C_1 de P_1

centre Ω_1 projeté orthogonal de $0_{\mathbb{R}^3}$ sur P_1 et de rayon

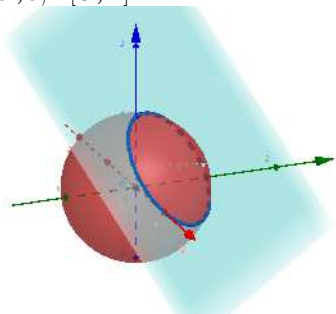
$$\sqrt{1^2 - d(0_{\mathbb{R}^3}; P_1)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Paramétrage de la droite passant par $0_{\mathbb{R}^3}$ et orthogonale à P_1 : $D : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Ainsi $\Omega_1 = D \cap P_1$ or $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow 3t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$ ainsi $\Omega_1 = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

De même $S \cap P_2$ est le cercle C_2 de P_2 centre $\Omega_2 = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

IV.G.2) $W \in \mathcal{O} (3) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a+b+c=1 \\ (a;b;c) \in [0;1]^3 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c) \in C_1 \cap [0;1]^3$



or $\forall x \in]0;1[$, $x^2 < x$ de même pour y et z

Ainsi $\forall (x;y;z) \in]0;1[^3$, $x^2+y^2+z^2 < x+y+z$

Ainsi $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a+b+c=1 \\ (a;b;c) \in [0;1]^3 \end{cases} \Rightarrow (x;y;z) \in [0;1]^3$

Or $Car([0;1]^3) = 2^3 = 8$ ce qui ne fait que 8 triplets à envisager.

On obtient rapidement $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a+b+c=1 \\ (a;b;c) \in [0;1]^3 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c) \in \{(1;0;0); (0;1;0); (0;0;1)\}$

Ainsi $W \in \mathcal{O} (3) \Leftrightarrow W \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

V.A. L'ensemble $\mathcal{P} (n)$ contient $n!$ éléments, $\mathcal{P} (n)$ n'est donc pas convexe. Plus précisément on a par exemple :

$$\frac{1}{2}P_{1,2} + \frac{1}{2}P_{1,3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{P}_n$$

D'après II.A.4) $\mathcal{O} (n)$ n'est pas convexe.

Soient $(M; M') \in (\mathcal{B}_n)^2$ et $t \in [0;1]$ alors

$$\begin{cases} (1-t)M + tM' \in \Pi_n \text{ car } \Pi_n \text{ est un sous-espace vectoriel} \\ s((1-t)M + tM') = (1-t)s(M) + ts(M') = 1-t+t=1 \\ \text{les coefficients de } (1-t)M + tM' \text{ sont positifs car } 1-t \geq 0 \text{ et } t \geq 0 \end{cases}$$

donc $(1-t)M + tM' \in \mathcal{B}_n$

Ce raisonnement étant valide $\forall (M; M') \in (\mathcal{B}_n)^2$ et $\forall t \in [0;1]$, \mathcal{B}_n est convexe.

Les sous-espaces vectoriels sont convexes car $[A, B] \subset Vect(A, B)$. Ainsi, d'après

II.C.3) Π_n est convexe

Enfin $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe car, par exemple, $\begin{cases} I_n \in GL_n(\mathbb{R}) \\ -I_n \in GL_n(\mathbb{R}) \end{cases}$ mais

$$\frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}(-I_n) = 0_{M_n(\mathbb{R})} \notin GL_n(\mathbb{R})$$

V.B.1) $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ or $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 or $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Donc la décomposition n'est pas unique.

V.B.2) Soit $P \in \mathcal{P}_n$

Considérons $(A; B) \in \mathcal{B}_n$ et $t \in]0;1[$ tel que $P = (1-t)A + tB$

On a $\begin{cases} 1-t \in]0;1[\\ t \in]0;1[\end{cases}$

Et en notant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a $\forall (i,j) \in [1;n]^2$, $\begin{cases} a_{i,j} \in [0;1] \\ b_{i,j} \in [0;1] \end{cases}$

donc tous les coefficients de $(1-t)A$ et tB sont dans l'intervalle $[0;1]$

En notant $P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $\exists \sigma \in S_n$ tel que $p_{i,j} = 0$ si $i \neq \sigma(j)$

Or la somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si les deux réels sont nuls.

Donc $\forall (i,j) \in [1;n]^2$, si $i \neq \sigma(j)$ alors $\begin{cases} a_{i,j} = 0 \\ b_{i,j} = 0 \end{cases}$

Et comme $(A;B) \in \mathcal{B}_n$, leurs autres coefficients sont nécessairement égaux à 1 :

$$\begin{cases} a_{\sigma(j),j} = 1 \\ b_{\sigma(j),j} = 1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{P=A=B}$

Ce raisonnement étant valide $\forall P \in \mathcal{P}_n$, toutes les matrices de permutations sont des points extrémaux de \mathcal{B}_n .

Remarque : l'énoncé de cette question donne un indice pour V.A) car elle n'aurait pas de sens si \mathcal{B}_n n'était pas convexe.

V.C) On cherche $a \in [0;1]$ tel que $\begin{cases} (A;B) \in \mathcal{B}_n \\ t \in]0,1[\end{cases} \Rightarrow U_a = A = B$
 $U_a = (1-t)A + tB$

D'après V.C) si U_a est une matrice de permutations (i.e. $a \in \{0;1\}$) alors c'est un point extrémal de \mathcal{B}_2 .

Si $a \in]0;1[$ alors, en particulier, $U_a = (1-a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-a)P_{1,2} + aI_2$

or $\begin{cases} (P_{1,2}; I_2) \in (\mathcal{B}_2)^2 \\ a \in]0;1[\end{cases}$ et $P_{1,2} \neq I_2$ donc U_a n'est pas un point extrémal dans \mathcal{B}_2 .

Ainsi $\boxed{\text{seules les matrices de permutations sont des points extrémaux dans } \mathcal{B}_2.}$