

I Premiers pas

1. La question est étrangement formulée : si $(P(S_k = i))_{1 \leq i \leq 5}$ est une famille de réels non tous nuls,

$P(S_{k+1} = 1)$ en est nécessairement une combinaison linéaire...

Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $((S_k = i))_{1 \leq i \leq 5}$ est un système complet d'événement, on peut donc écrire la

formule des probabilités totales suivantes : $P(S_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^5 P(S_{k+1} = 1 | S_k = i) P(S_k = i)$. Or :

- Si à l'instant k , le rat se trouve en salle 1, alors à l'instant $k+1$ il se trouve salle 2, 3, 4 ou 5 :

$$P(S_{k+1} = 1 | S_k = 1) = 0.$$

- Soit $i \in \llbracket 2, 5 \rrbracket$. Si à l'instant k , le rat se trouve en salle i , alors à l'instant $k+1$ il se trouve avec équiprobabilité dans l'une des 3 salles communiquant avec celle-ci. En particulier, la probabilité (conditionnelle)

$$\text{qu'il soit à l'instant } k+1 \text{ en salle 1 est : } P(S_{k+1} = 1 | S_k = i) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{On a donc } P(S_{k+1} = 1) = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^5 P(S_k = i)$$

2. On obtient par un raisonnement analogue, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$P(S_{k+1} = 2) = \frac{1}{4} P(S_k = 1) + \frac{1}{3} P(S_k = 3) + \frac{1}{3} P(S_k = 5)$$

$$P(S_{k+1} = 3) = \frac{1}{4} P(S_k = 1) + \frac{1}{3} P(S_k = 2) + \frac{1}{3} P(S_k = 4)$$

$$P(S_{k+1} = 4) = \frac{1}{4} P(S_k = 1) + \frac{1}{3} P(S_k = 3) + \frac{1}{3} P(S_k = 5)$$

$$P(S_{k+1} = 5) = \frac{1}{4} P(S_k = 1) + \frac{1}{3} P(S_k = 2) + \frac{1}{3} P(S_k = 4).$$

Matriciellement :

$$X_{k+1} = B X_k \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On constate que la somme des coefficients de chaque colonne de B vaut 1. Donc, la somme des coefficients de

chaque ligne de ${}^t B$ vaut 1, ce qui assure que ${}^t B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: 1 est valeur propre de ${}^t B$, et le vecteur (non

nul) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

4. D'après la question 2. et par récurrence immédiate, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = B^k X_0$.

Or le calcul montre que $B X_0 = X_0$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = X_0$: les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.

5. Les variables aléatoires S_0 et S_1 ne sont pas indépendantes, car par exemple $P(S_1 = 1) = \frac{1}{4}$ (d'après 4.) alors que $P(S_1 = 1 | S_0 = 1) = 0$ (d'après 1.)

II Convergence dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

6. Le vecteur x appartenant à $\text{Ker}(u - I_E)$, il vérifie $u(x) = x$, d'où pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $u^\ell(x) = x$.

Il en résulte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} x = x$, d'où bien sûr $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = x$.

7. Ici, x appartient à $\text{Im}(u - I_E)$, il existe donc $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$u^\ell(x) = u^{\ell+1}(y) - u^\ell(y)$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} (u^{\ell+1}(y) - u^\ell(y))$, puis

par télescopage, $r_k(x) = \frac{1}{k} (u^k(y) - y)$. On en déduit par inégalité triangulaire que

$\|r_k(x)\| \leq \frac{1}{k} (\|u^k(y)\| + \|y\|)$. Or par hypothèse, pour tout $z \in E$: $\|u(z)\| \leq \|z\|$, donc pour tout k ,

$\|u^k(z)\| \leq \|z\|$. Par suite, $\|r_k(x)\| \leq \frac{2\|y\|}{k}$, et ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|r_k(x)\| = 0$: autrement dit,

$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0_E$.

8. Le théorème du rang donne déjà $\dim(\text{Ker}(u - I_E)) + \dim(\text{Im}(u - I_E)) = \dim(E)$. D'autre part,

soit $x \in \text{Ker}(u - I_E) \cap \text{Im}(u - I_E)$; alors, d'après les deux questions précédentes, on a à la fois

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = x \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0_E, \text{ donc } x = 0_E, \text{ par conséquent}$$

$\text{Ker}(u - I_E) \cap \text{Im}(u - I_E) = \{0_E\}$: $\text{Ker}(u - I_E)$ et $\text{Im}(u - I_E)$ sont supplémentaires dans E .

9. D'après le résultat de la question précédente, on peut écrire (de manière unique) le vecteur x sous la forme

$x = x_K + x_I$, avec $x_K \in \text{Ker}(u - I_E)$ et $x_I \in \text{Im}(u - I_E)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$r_k(x) = r_k(x_K) + r_k(x_I)$. D'après les questions 6. et 7., $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x_K) = x_K$ et

$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x_I) = 0_E$, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = x_K$.

Par définition, $p(x) = x_K$ est la projection de x sur $\text{Ker}(u - I_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - I_E)$:

l'application $p: x \mapsto p(x)$ est donc le projecteur de E ayant pour image $\text{Ker}(u - I_E)$ et pour noyau

$\text{Im}(u - I_E)$.

10. Considérons l'endomorphisme $u: X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . Alors, avec les

notations données en début de cette partie II., on a $R_k = r_k$. Par ailleurs, l'hypothèse

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq \|X\|$ est vérifiée. Il en résulte que

$\text{Ker}(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k X = p(X)$,

où p est le projecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'image $\text{Ker}(A - I_n)$ et de noyau $\text{Im}(A - I_n)$.

Considérons la base canonique $(E_1, \dots, E_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et P la matrice de p dans

cette base. Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k E_j = p(E_j) = P E_j$, d'où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$\lim_{k \rightarrow +\infty} (R_k)_{i,j} = P_{i,j}$. En dimension finie, la convergence coordonnée par coordonnée équivaut à la

convergence, en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k = P$; et, P étant une matrice de projecteur, on a bien $P^2 = P$.

III Matrices stochastiques

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $AU = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix}$. La matrice A vérifie la condition (4) si et seulement

si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$, donc si et seulement si $AU = U$.

12. Soient $A, B \in \mathcal{E}$. A et B étant à coefficients positifs, la matrice produit AB l'est aussi. D'autre part, $(AB)U = A(BU) = AU = U$, donc, d'après la question précédente, AB vérifie la condition (4). Ainsi AB appartient à \mathcal{E} , et \mathcal{E} est stable pour le produit matriciel.

13. Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} = \left((a_{i,j}(p))_{1 \leq i, j \leq n} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de \mathcal{E} , et soit

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ sa limite. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, A_p est à coefficients positifs, et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$a_{i,j} = \lim_{p \rightarrow +\infty} a_{i,j}(p)$, donc A est à coefficients positifs. D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p U = U$.

L'application $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto MU \end{pmatrix}$ est continue (car linéaire en dimension finie), on a donc par passage à la

limite, $AU = U$, et A vérifie la condition (4). Il en résulte que A appartient à \mathcal{E} , et que \mathcal{E} est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A, B deux éléments de \mathcal{E} , et soit un réel $\lambda \in [0, 1]$; posons $C = \lambda A + (1 - \lambda)B$. A et B sont à coefficients positifs et $\lambda, 1 - \lambda$ sont positifs, donc C est à coefficients positifs.

$CU = \lambda AU + (1 - \lambda)BU = \lambda U + (1 - \lambda)U = U$, donc C vérifie la condition (4). La matrice C appartient à \mathcal{E} , et \mathcal{E} est convexe.

14. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{E}$, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posons $AX = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : |y_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \leq \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)}_{=1} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|X\|_\infty,$$

donc $\|Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.

15. Posons $A^p = B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. \mathcal{E} étant stable par produit matriciel, la matrice B est stochastique. Il en résulte que $BU = U$, d'où $\dim(\text{Ker}(B - I_n)) \geq 1$. D'autre part, considérons, comme nous y invite l'énoncé,

un élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\text{Ker}(B - I_n)$, et un indice $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$. La s -ième

ligne de l'égalité $BX = X$ s'écrit $\sum_{j=1}^n b_{s,j} x_j = x_s$. Or, puisque les $b_{s,j}$ sont strictement positifs :

$\sum_{j=1}^n b_{s,j} x_j \leq \sum_{j=1}^n b_{s,j} x_s$, avec égalité si et seulement si pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j = x_s$. Comme B est

stochastique, on a $\left(\sum_{j=1}^n b_{s,j} \right) x_s = x_s$, et l'on conclut : $\sum_{j=1}^n b_{s,j} x_j = x_s$ impose $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j = x_s$.

Alors, $X = x_s \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(U)$. Finalement, $\text{Ker}(B - I_n) = \text{Vect}(U)$, et $\dim(\text{Ker}(B - I_n)) = 1$.

16. La matrice A étant stochastique, $AU = U$, donc $\text{Vect}(U) \subset \text{Ker}(A - I_n)$. Réciproquement, soit

$X \in \text{Ker}(A - I_n)$. Alors $AX = X$, d'où $A^p X = X$, et $X \in \text{Ker}(B - I_n) = \text{Vect}(U)$.

On a donc l'égalité $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.

17. \mathcal{E} étant stable par produit matriciel : $\forall \ell \in \mathbb{N}$, A^ℓ est stochastique. D'autre part, puisque \mathcal{E} est convexe, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(M_0, \dots, M_{k-1}) \in \mathcal{E}^k$ et pour tout $(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \in (\mathbb{R}_+)^k$ tel que

$\sum_{\ell=0}^{k-1} \lambda_\ell = 1$, la matrice $\sum_{\ell=0}^{k-1} \lambda_\ell M_\ell$ appartient à \mathcal{E} . En appliquant ceci avec $\lambda_\ell = \frac{1}{k}$ et $M_\ell = A^\ell$, on en

déduit que $R_k = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$ est une matrice stochastique.

18. D'après la question 14. : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leq \|X\|$. On peut dès lors utiliser le résultat de la

question 10., et l'on en déduit que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice P (vérifiant $P^2 = P$).

La matrice P est stochastique, comme limite d'éléments du fermé \mathcal{E} . Elle de rang 1, car (toujours d'après la question 10.), P est la matrice dans la base canonique de la projection de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur

$\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(U)$, parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$.

19. D'après la question précédente, P est de rang 1 ses lignes sont donc colinéaires. Elles sont de plus stochastiques, car P l'est ; colinéaires et ayant toutes la somme de leurs coefficients égale à 1, elles sont donc égales. Cela

revient à dire que $P = U L$, où L est la première ligne de P , et, d'après ce qui précède, L est bien à coefficients positifs, et stochastique.

20. • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k A = \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k A^\ell = \frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{1}{k} I_n$. Par passage à la limite lorsque k tend

vers $+\infty$, on en déduit : $P A = P$.

• On a donc $U L A = U L$, et la première ligne de cette égalité donne : $L A = L$. Remarquons que cela revient à dire que ${}^t A {}^t L = {}^t L$, c'est-à-dire que ${}^t L \in \text{Ker}({}^t A - I_n)$.

Réciproquement, soit K une matrice stochastique vérifiant $K A = K$. Alors on a aussi ${}^t K \in \text{Ker}({}^t A - I_n)$.

Or on sait que $\text{Ker}(A - I_n)$ est de dimension 1, il en est donc de même pour $\text{Ker}({}^t A - I_n)$. Par suite,

$\text{Ker}({}^t A - I_n) = \text{Vect}({}^t L)$, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $K = \lambda L$. Comme la somme des coefficients de K est égale à la somme des coefficients de L , $\lambda = 1$, et $K = L$. Finalement, L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $L A = L$.

21. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = B = (b_{i,j})$ soit à coefficients strictement positifs. L'égalité $L A = L$

entraîne $L B = L$, soit, en notant $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i,j}$. Les λ_i sont positifs

et non tous nuls, les $b_{i,j}$ sont strictement positifs ; on en déduit que λ_j est strictement positif : les coefficients de L sont tous strictement positifs.

22. Notons à nouveau u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . D'après les questions 8.

et 16., on peut compléter (U) , base de $\text{Ker}(A - I_n)$, en une base $\mathcal{B} = (U, V_1, \dots, V_{n-1})$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec (V_1, \dots, V_{n-1}) base de $\text{Im}(A - I_n)$. Comme U est vecteur propre de A pour la valeur propre 1, et

comme $\text{Im}(A - I_n)$ est stable par u , la matrice de u dans la base \mathcal{B} est $M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & (0) \\ \hline (0) & N \end{array} \right)$, où

$N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est la matrice de l'endomorphisme v induit par u sur $\text{Im}(A - I_n)$, dans la base (V_1, \dots, V_{n-1}) de cet espace.

Alors (en développant par rapport à la première ligne), $\chi_A = \chi_u = \chi_M = (X - 1)\chi_N$.

Supposons que 1 ne soit pas valeur propre simple de A . Dans ce cas, 1 est racine de χ_N , donc valeur propre de v . Par suite, il existe $X \in \text{Im}(A - I_n)$ non nul et tel que $(A - I_n)X = 0$, autrement dit

$\text{Im}(A - I_n) \cap \text{Ker}(A - I_n) \neq \{0\}$. Ceci est absurde d'après la question 8., et l'on en conclut que 1 est valeur propre simple de A .

IV Application au labyrinthe

23. La matrice $A = {}^t B$ est stochastique (ses coefficients sont positifs, et l'on a remarqué en question **3.** que la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1). Puisque l'on admet que A^2 est à coefficients strictement positifs, on peut appliquer ce qui précède : la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $P = UL$, où L est l'unique matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$, ie. $B {}^t L = {}^t L$. Or on a constaté en question **4.** que

$$B \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix}. \text{ La matrice ligne } L = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{3}{16} \quad \frac{3}{16} \quad \frac{3}{16} \quad \frac{3}{16} \right) \text{ est stochastique et vérifie } B {}^t L = {}^t L, \text{ donc}$$

$$\lim (R_k)_{k \in \mathbb{N}^*} = UL, \text{ soit : } P = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. La loi de S_0 (resp. S_1) est entièrement caractérisée par le vecteur X_0 (resp. X_1), et l'on sait que $X_1 = B X_0$. Dire que S_1 suit la même loi que S_0 revient donc à dire que $X_0 = B X_0$, ou encore que la matrice ligne $K = {}^t X_0$ vérifie $KA = K$. Or K est stochastique, et l'on a prouvé en **20.** l'unicité d'une solution stochastique de l'équation $KA = K$. On en conclut que S_1 suit la même loi que S_0 si et seulement si

$$K = L, \text{ ie. } X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix}. \text{ Lorsque cette condition est vérifiée, } B X_0 = X_0, \text{ d'où pour tout } k \in \mathbb{N},$$

$X_k = B^k X_0 = X_0$, et les variables aléatoires S_k suivent toutes la même loi. Finalement, les S_k suivent

toutes la même loi si et seulement si S_0 suit la loi caractérisée par le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix}$.