Corrigé de la première épreuve de mathématique
CCINP -MP- 2023

daouia__abdelkader@hotmail.fr

1 Exerice 2

On définit la fonction $f \;:\; (xy) \longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q.6 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x} - x$, $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$
g est strictement décroissante , continue sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

g réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle s'annule donc une et une seule fois :

$$\exists \,!\, a \in \mathbb{R} \quad : \quad e^{-a} = a$$

Q.7 f est de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - e^{-x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y$$

Pour trouver les points critiques , il faut résoudre le système :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - e^{-x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y = 0$$

$$\Longrightarrow x = 2y \quad , \quad e^{-x} = x$$

D'après la question $Q.6$, on a donc :

$$x = a \quad , \quad y = \frac{a}{2} \qquad \Longrightarrow (x, y) = (a, \frac{a}{2})$$

où a est l'unique solution de l'équation $e^{-x} = x$.

Q.8 On note $A = (a, \frac{a}{2})$, la matrice Hessienne de f en ce point est :

$$H_A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a, \frac{a}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, \frac{a}{2}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, \frac{a}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}((a, \frac{a}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + e^{-a} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$rt - s^2 = \det(H_A) = 4(e^{-a} + 1) > 0 \quad , \quad r > 0$$

f admet donc un extremum local en A , il s'agit d'un minimum.

2 Problème

Dans tout le problème , $\alpha \in]0, 1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad , \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

Partie I-Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série.

Q.9 La fonction $x \longmapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue positive sur $]0,1]$, au voisinage de 0 , on a l'équivalence :

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \sim_0 x^{\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \geq 0$$

Comme $1-\alpha < 1$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc $x \longmapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est aussi intégrable sur $]0,1]$.
Au voisinage de $+\infty$, on a l'équivalence :

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha}} \geq 0$$

Comme $2-\alpha > 1$,et par comparaison avec une intégrale de Riemann , la fonction $x \longmapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

Q.10 On pose le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ et on trouve le résultat .

Q.11 On rappelle le développement en série entière usuel :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad x \in]-1,1[$$

On a donc le résultat :

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1} \quad , \quad x \in]0,1[$$

On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{x \longrightarrow 1} f_n(x) = b_n = (-1)^n$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} b_n$ diverge, d'après le théorème d'interversion somme limite , la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

Q.12 Soit $x \in]0,1[$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{x^{\alpha-1}(1-(-x)^{n+1})}{1+x} = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \quad , \quad |\ S_n(x)| \leq \frac{2}{1+x} = \varphi(x)$$

La suite $(S_n)_n$ converge simplement sur $]0,1[$, sa limite est continue , et dominée par φ qui est intégrable sur $]0,1[$, d'après le théorème de la convergence dominée , on peut écrire :

$$\begin{aligned} I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx &= \int_0^1 \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} \end{aligned}$$

Q.13 D'après la question $Q.10$, on a

$$I(1-\alpha) = J(\alpha)$$

On peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = I(\alpha) + J(\alpha) = I(\alpha) + I(1-\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-\alpha}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k-\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[\frac{(-1)^k}{k+\alpha} + \frac{(-1)^{k-1}}{k-\alpha}\Big]$$
$$= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2\alpha}{\alpha^2 - k^2}$$

Q.14 En admettant la formule :

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\Big(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}\Big) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

On prend $x = 0$, et on trouve :

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\Big(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\Big) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Partie II Lien avec la fonction Gamma

Q.15 Soit $x \in]0,+\infty[$, $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue , positive sur $]0,+\infty[$:

(a) Au voisinage de 0 :

$$t^{x-1}e^{-t} \sim_0 \frac{1}{t^{1-x}}$$

Comme $1-x<1$, par comparaison avec une intégrale de Riemann, on obtient l'intégrabilité de la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ sur $]0,1]$.

(b) Sur $[1,+\infty[$:

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0 \Longrightarrow t^{x-1}e^{-t} =_{+\infty} o(\frac{1}{t^2})$$

On obtient encore une fois l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$.

Q.16 Il s'agit d'une intégrale dépendant d'un paramètre :

(a) Pour $t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto \frac{t^{\alpha-1}e^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

(b) Pour $x \in [0,+\infty[$, $t \longmapsto \frac{t^{\alpha-1}e^{-xt}}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

(c) Hypothèse de domination (globale) :

$$\Big|\frac{t^{\alpha-1}e^{-xt}}{1+t}\Big| \le \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \qquad \forall\ x \in [0,+\infty[\ \ ,\ \forall\ t \in]0,+\infty[$$

(d) La fonction dominatrice est intégrable.

D'après le théorème de continuité des intégrales dépendants d'un paramètre , f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q.17 On pose :

$$f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt \qquad , \quad g(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}e^{-xt}}{1+t} \quad (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

(a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^\alpha e^{-xt}}{1+t} \qquad (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[.$

(b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $t \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

(c) Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

(d) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t^\alpha e^{-at}}{1+t} \qquad \forall\ x \in [a,b] \quad , \quad \forall t \in]0,+\infty[$$

La fonction dominatrice est intégrable , d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale , f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ é, et on a :

$$f_\alpha'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-xt}}{1+t}dt \qquad x \in]0,+\infty[$$

Q.18 Pour trouver la limite , on va appliquer le théorème de la convergence dominée .
Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $]0,+\infty[$ qui converge vers $+\infty$.
On pose $h_n(t) = \frac{t^{\alpha-1}e^{-x_n t}}{1+t} \qquad t \in]0,+\infty[$

(a) $f_\alpha(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)dt.$

(b) La suite $(h_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$.

(c) Hypothèse de domination :

$$|h_n(t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \qquad n \in \mathbb{N} \quad , \quad t \in]0,+\infty[$$

La fonction dominatrice est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On peut conclure d'après TCD :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f_\alpha(x_n) = \int_0^{+\infty} h_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \Big(\lim_{x \longrightarrow +\infty} h_n(t)\Big)dt = 0$$

Et ceci , pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $]0,+\infty[$ qui converge vers $+\infty$, la limite est donc 0 en $+\infty$.

Q.19 La fonction $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha} = t^{-\alpha}e^{-t} = t^{(1-\alpha)-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, il suffit de prendre $x = 1-\alpha$ et appliquer la question $Q.15$.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt = 0$$

car c'est le reste d'une intégrale convergente .

Partie III Vers la formule des compléments

Q.20 $f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-xt}}{1+t}dt \quad , \quad f_\alpha'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-xt}}{1+t}dt$

$$\Longrightarrow f_\alpha(x) - f_\alpha'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^\alpha + t^{\alpha-1})e^{-xt}}{1+t} = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-xt}dt$$

En posant le changement de variable $u = tx$, on trouve le résultat

Q.21 On vérifie facilement l'équation différentielle pour g_α.
La fonction $h = g_\alpha - f_\alpha$ est solution de l'équation homogène : $y' - y = 0$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$g_\alpha(x) - f_\alpha(x) = \lambda e^x \qquad x \in]0, +\infty[$$

Comme les limites de g_α et f_α sont nulles en $+\infty$, la constante $\lambda = 0$,on a donc l'égalité.

Q.22 On vient de démontrer que :

$$g_\alpha(x) = f_\alpha(x) \qquad x \in]0, +\infty[$$

Comme f_α est continue en 0 d'après la question $Q.16$, et g_α admet une limite en 0 (intégrabilité) , on peut prolonger l'égalité au point 0 , et on a le résultat .

Q.23 D'après la question $Q.14$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.
En utilisant la question précédente , on trouve :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}e^{-t}dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

Q.24 Si on prend $\alpha = \frac{1}{2} \in]0, 1[$, en appliquant la question précédente :

$$\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \pi$$

D'autre part :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$$

En posant le changement de variable $x = \sqrt{t}$:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$