

PARTIE I : Réduction des matrices réelles d'ordre 2

I.A - Généralités

I.A.1) Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul rapide donne directement

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A.$$

I.A.2) Le discriminant du polynôme caractéristique est donc $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4 \det A$.

– Supposons d'abord A diagonalisable dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Alors, dans le cas $\Delta = 0$, A admet une seule valeur propre λ_0 (d'ailleurs, λ_0 est nécessairement un réel puisque A est à coefficients réels); étant diagonalisable, elle est semblable à $\lambda_0 I_2$, soit $A = P^{-1}(\lambda_0 I_2)P$ avec $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, d'où $A = \lambda_0 I_2$.

– Supposons la propriété de l'énoncé réalisée, c'est-à-dire $\Delta \neq 0$ ou $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C}$ tq $A = \lambda_0 I_2$.

– Dans le cas $\Delta \neq 0$, le polynôme caractéristique de A admet deux racines simples dans \mathbb{C} , donc A admet deux valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} et est par suite diagonalisable dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

– Dans le second cas, A est diagonale donc a fortiori diagonalisable.

Dans les deux cas, A est diagonalisable ce qui montre l'implication cherchée.

I.A.3) Le raisonnement est similaire à celui ci-dessus ; il faut juste remarquer en plus que, lorsque A est diagonalisable dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, elle admet nécessairement 1 ou 2 valeurs propres réelles, donc son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et a donc un discriminant positif (et réciproquement).

I.B - Applications

I.B.1) On a $X_{k+1} = AX_k$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

I.B.2) Par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k = A^k X_0$.

I.B.3) Ici $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. A ayant deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

Notons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathbb{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $V_2 = E_1 + E_2 \in \text{Ker}(A - 2I_2)$; $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ donc $V_3 = 2E_1 + E_2 \in \text{Ker}(A - 3I_2)$.

La famille (V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de A et si l'on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres, on a donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

I.B.4) On aura donc (classiquement) : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^k P^{-1}$. On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

$$\text{et enfin } A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^k - 2^k & -2 \cdot 3^k + 2^{k+1} \\ 3^k - 2^k & -3^k + 2^k \end{pmatrix}.$$

I.B.5) Puisque $X_k = A^k X_0$ on aura $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k \quad \text{et} \quad v_k = 3 \cdot 2^k - 3^k.$$

PARTIE II : Réduction de matrices d'ordre 3 ou 4

II.A - Le cas n = 3

II.A.1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = I_3$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de k par 3 s'écrit $k = 3q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$, d'où

$$J^k = J^{3q+r} = (J^3)^q J^r = I_3 J^r = J^r.$$

II.A.2) La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle pour $n \geq 2$. Ici, $1, j$ et j^2 sont les racines cubiques de l'unité, et $1 + j + j^2 = 0$.

II.A.3) Un calcul simple donne $\chi_J(\lambda) = 1 - \lambda^3$ d'où $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{1, j, j^2\}$.

II.A.4) J admettant trois valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} est diagonalisable dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$.

On a clairement $J \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{Ker}(J - I_3)$ est la droite vectorielle de base $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $J \cdot V = jV \iff \begin{cases} -jx + y = 0 \\ -jy + z = 0 \\ x - jz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = jx \\ z = j^2x \end{cases}$ donc $\text{Ker}(J - jI_3)$ est la droite vectorielle de base $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

De la même façon, $\text{Ker}(J - j^2I_3)$ est la droite vectorielle de base $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ (on rappelle que $j^2 = \bar{j}$).

(V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de J dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à J a pour matrice $D = \text{diag}(1, j, j^2)$, c'est-à-dire que l'on a $J = PDP^{-1}$ avec P matrice de passage

de la base canonique à la base (V_1, V_2, V_3) soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

II.A.5)

a) $A(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.

b) Puisque $J = PDP^{-1}$ et $J^2 = PD^2P^{-1}$ on aura $A(a, b, c) = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}$, avec

$aI_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$ diagonale, donc $A(a, b, c)$ est diagonalisable, et la matrice de passage P ne dépend pas de a, b, c .

c) Les valeurs propres de $A(a, b, c)$ sont donc les éléments diagonaux de la matrice $aI_3 + bD + cD^2$ à savoir $a + b + c$, $a + bj + cj^2$ et $a + bj^2 + cj$.

d) On en déduit ensuite : $\det A = \det(aI_3 + bD + cD^2) = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$. Le calcul direct du déterminant donne aussi $\det A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, d'où la jolie identité remarquable :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj).$$

II.A.6)

a) E est l'ensemble des combinaisons linéaires de I_3, J et J^2 ; c'est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par ces 3 matrices.

b) (I_3, J, J^2) est donc une famille génératrice de E ; d'autre part il est immédiat de vérifier que $aI_3 + bJ + cJ^2 = O_3 \implies a = b = c = 0$ donc c'est aussi une famille libre et par suite c'est une base de E . D'où $\dim E = 3$.

II.B - Le cas $n \geq 3$ quelconque

II.B.1) Compte tenu de la définition de u et de la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base,

$$\text{on a : } U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

II.B.2) $u(x_\omega) = u\left(\sum_{k=1}^n \omega^{k-1} e_k\right) = u(e_1) + \sum_{k=2}^n \omega^{k-1} u(e_k) = e_n + \sum_{k=2}^n \omega^{k-1} e_{k-1} = \omega^n e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k e_k = \sum_{k=1}^n \omega^k e_k$
donc $u(x_\omega) = \omega x_\omega$.

II.B.3) Le calcul précédent montre que toute racine n -ième de l'unité, ω , est valeur propre de u (car $x_\omega \neq 0$ en est un vecteur propre associé).

u possède donc n valeurs propres distinctes, et $\dim(\mathbb{C}^n) = n$; par suite, u est diagonalisable.

Si l'on note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ les n racines n -ièmes de l'unité, une base de vecteurs propres de u est formée des vecteurs $(x_{\omega_0}, x_{\omega_1}, \dots, x_{\omega_{n-1}})$.

II.B.4) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $u(x_{\omega_k}) = \omega_k x_{\omega_k}$ donc $u^n(x_{\omega_k}) = \omega_k^n x_{\omega_k} = x_{\omega_k}$. Les x_{ω_k} formant une base de \mathbb{C}^n , on en déduit que $u^n = \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$ (on pouvait aussi calculer directement les $u^n(e_i)$, nul besoin de diagonaliser).

II.C - Le cas $n = 4$

$$\text{II.C.1)} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^4 = I_4.$$

II.C.2) Les racines quatrièmes de l'unité sont $1, i, -1$ et i . D'après les résultats de **II.B**, U est diagonalisable, et $U = PDP^{-1}$, où $D = \text{diag}(1, i, -1, -i)$ et où P est la matrice de passage de la base canonique à la base

$$(x_{\omega_0}, x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, x_{\omega_3}) \text{ c'est-à-dire } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1^2 & i^2 & (-1)^2 & (-i)^2 \\ 1^3 & i^3 & (-1)^3 & (-i)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Puisque $V = aI_4 + bU + cU^2 + dU^3$, on aura $V = P(aI_4 + bD + cD^2 + dD^3)P^{-1}$. Puisque la matrice $aI_4 + bD + cD^2 + dD^3$ est diagonale, la matrice V est diagonalisable; ses valeurs propres sont les termes diagonaux de la matrice $aI_4 + bD + cD^2 + dD^3$, c'est-à-dire $a + b + c + d$, $a + ib - c - id$, $a - b + c - d$ et $a - ib - c - id$, une base de vecteurs propres associés étant $(x_{\omega_0}, x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, x_{\omega_3})$.

PARTIE III : Théorème de Cayley-Hamilton

III.A Le polynôme caractéristique de A étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$, il résulte d'un théorème du cours que A est trigonalisable dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

III.B T et A étant semblables ont le même polynôme caractéristique. Il fallait peut-être le redémontrer :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(PTP^{-1} - \lambda I_n) = \det(P(T - \lambda I_n)P^{-1}) = \det(P) \det(T - \lambda I_n) \det(P^{-1}) = \det(T - \lambda I_n) = \chi_T(\lambda).$$

III.C Immédiat.

III.D TE_{k+1} est la $(k+1)$ -ième colonne de la matrice T donc $TE_{k+1} = \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ \lambda_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où λ_{k+1} est situé à la $(k+1)$ -ième

ligne, d'où $TE_{k+1} - \lambda_{k+1}E_{k+1} = \begin{pmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; les coordonnées de ce vecteur sur E_{k+1}, \dots, E_n sont nulles, donc il appartient bien à $\text{Vect}(E_1, E_2, \dots, E_k)$.

III.E Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ notons $\mathcal{F}_k = \text{Vect}(E_1, \dots, E_k)$ et $\mathcal{F}_0 = \{0_{\mathbb{C}^n}\}$.

D'après la question précédente, pour $k \geq 2$, $(T - \lambda_k I_n)(E_k) \in \mathcal{F}_{k-1}$; mais puisque T est triangulaire supérieure, les sous-espaces vectoriels \mathcal{F}_k sont stables par T (propriété du cours) donc on a aussi $(T - \lambda_k I_n)(\mathcal{F}_{k-1}) \subset \mathcal{F}_{k-1}$ et par suite : $(T - \lambda_k I_n)(\mathcal{F}_k) \subset \mathcal{F}_{k-1}$.

Puisque $(T - \lambda_1 I_n)E_1 = \lambda_1 E_1 - \lambda_1 E_1 = 0_{\mathbb{C}^n}$ on a $(T - \lambda_1 I_n)(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_0$, et finalement la propriété : $(T - \lambda_k I_n)(\mathcal{F}_k) \subset \mathcal{F}_{k-1}$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On aura donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $(T - \lambda_k I_n)(\mathcal{F}_k) \subset \mathcal{F}_{k-1}$
 puis pour $k \geq 2$: $(T - \lambda_{k-1} I_n)(T - \lambda_k I_n)(\mathcal{F}_k) \subset (T - \lambda_{k-1} I_n)(\mathcal{F}_{k-1}) \subset \mathcal{F}_{k-2}$
 puis pour $k \geq 3$: $(T - \lambda_{k-2} I_n)(T - \lambda_{k-1} I_n)(T - \lambda_k I_n)(\mathcal{F}_k) \subset (T - \lambda_{k-2} I_n)(\mathcal{F}_{k-2}) \subset \mathcal{F}_{k-3}$ etc...
 et finalement par récurrence, avec les notations de l'énoncé : $M_k(\mathcal{F}_k) \subset \mathcal{F}_0$ soit $M_k(\mathcal{F}_k) = \{0_{\mathbb{C}^n}\}$.

III.F En particulier $M_n(\mathcal{F}_n) = \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ et puisque $\mathcal{F}_n = \text{Vect}(E_1, \dots, E_n) = \mathbb{C}^n$ on a $M_n = O_n$.

Puisque $M_n = \prod_{j=1}^n (T - \lambda_j I_n) = \prod_{j=1}^n (P^{-1}(A - \lambda_j I_n)P) = P^{-1} \left(\prod_{j=1}^n (A - \lambda_j I_n) \right) P$, on en déduit $\prod_{j=1}^n (A - \lambda_j I_n) = O_n$

et, puisque $\chi_A = (-1)^n \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)$, on démontré le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = O_n$.

PARTIE IV : Méthodes numériques de calcul.

IV.A - Le calcul du polynôme caractéristique

IV.A.1) D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a : $A^n = a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_0I_n$ donc en multipliant par X_0 à droite, on obtient l'égalité demandée.

IV.A.2) En considérant la matrice \tilde{A} écrite par blocs sous la forme $\tilde{A} = [X_0 \quad AX_0 \quad \dots \quad A^{n-1}X_0]$, c'est-à-dire

$$\text{dont la } j\text{-ième colonne est } A^{j-1}X_0, \text{ l'égalité de la question précédente s'écrit } \tilde{A}X = B \text{ avec } X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et $B = A^n X_0$.

IV.A.3) Si la famille $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est libre, les colonnes de la matrice \tilde{A} sont indépendantes ; \tilde{A} est donc inversible et le système $\tilde{A}X = B$ est de Cramer (c'est-à-dire possède une solution unique).

L'énoncé est ici inachevé! En effet, on ne voit pas bien à quoi servent ces questions ! On pouvait remarquer que, si l'on part d'un vecteur X_0 quelconque, on peut alors calculer la matrice \tilde{A} en calculant simplement les $A^k X_0$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, puis, en résolvant le système $\tilde{A}X = A^n X_0$, on trouve le vecteur X c'est-à-dire les coefficients du polynôme caractéristique (sauf si par malheur le choix de X_0 conduit à un système qui n'est pas de Cramer !). C'est la **méthode de Krylov**.

IV.B - Le calcul approché des valeurs propres

IV.B.1) On montre que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles :

- F est non vide, car il contient la suite nulle.
- Soient x et y deux suites de F , et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout entier $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} (\lambda x + y)_{n+k} &= \lambda x_{n+k} + y_{n+k} \\ &= \lambda(a_{n-1}x_{k+n-1} + a_{n-2}x_{k+n-2} + \dots + a_0x_k) + (a_{n-1}y_{k+n-1} + a_{n-2}y_{k+n-2} + \dots + a_0y_k) \\ &= a_{n-1}(\lambda x + y)_{k+n-1} + a_{n-2}(\lambda x + y)_{k+n-2} + \dots + a_0(\lambda x + y)_k \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $\lambda x + y$ appartient à F et démontre le résultat annoncé.

IV.B.2) Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ λ_j est une valeur propre de A , donc est racine de son polynôme caractéristique c'est-à-dire $\lambda_j^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i$. On aura alors, pour tout entier $k \geq 0$: $\lambda_j^{n+k} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^{i+k}$, ce qui signifie que la suite $(\lambda_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est élément de F .

IV.B.3)

- Démontrons d'abord les propriétés admises par l'énoncé :

- L'application $\varphi : \begin{cases} F & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y & \longmapsto (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$ est linéaire (vérification facile) et bijective, puisque toute suite élément de F est entièrement déterminée, et ce de façon unique, par la donnée de ses n premiers termes.

Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où $\dim F = \dim \mathbb{R}^n = n$.

- Les λ_j étant n réels distincts, montrons que les suites $(\lambda_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre.

Pour cela, supposons qu'il existe une combinaison linéaire de ces suites qui soit égale à la suite nulle, c'est-à-dire qu'il existe n scalaires α_i tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k = 0$.

On a alors, en particulier, lorsque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le système

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n & = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n & = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1^2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 & = 0 \\ \dots & \dots \\ \alpha_1 \lambda_1^{n-1} + \alpha_2 \lambda_2^{n-1} + \dots + \alpha_n \lambda_n^{n-1} & = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est une

matrice de Vandermonde inversible, les λ_j étant distincts. Par suite ce système possède pour seule solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, ce qui démontre le résultat annoncé.

• D'après ce qui précède, les suites $(\lambda_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ forment une famille libre de n éléments dans l'espace vectoriel F de dimension n , donc en forment une base. Toute suite y de F s'écrit donc comme combinaison linéaire de façon unique de ces suites, c'est-à-dire qu'il existe n réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k$.

II.B.4) a) Avec les notations précédentes, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{y_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k$. Puisque pour $j \geq 2$

$$\left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right| < 1 \text{ on a } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0 \text{ d'où } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1. \text{ Puisque } \alpha_1 \neq 0 \text{ on en déduit } y_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha_1 \lambda_1^k.$$

b) λ_1 est non nulle puisque l'énoncé a supposé $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$. On a donc pour tout entier k $\alpha_1 \lambda_1^k \neq 0$ et l'équivalent trouvé ci-dessus implique que y_k est non nul au moins à partir d'un certain rang (résultat du cours).

c) On peut donc pour k assez grand considérer le quotient $\frac{y_{k+1}}{y_k}$, et l'on aura $\frac{y_{k+1}}{y_k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha_1 \lambda_1^{k+1}}{\alpha_1 \lambda_1^k}$ puis

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_{k+1}}{y_k} = \lambda_1.$$

II.B.5) Je vois ici deux réponses possibles, pas très satisfaisantes (erreurs d'arrondi nombreuses et qui s'accroissent !):

– Une fois λ_1 obtenu, on peut effectuer la division euclidienne du polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$ par $\lambda - \lambda_1$, et répéter le processus avec le nouveau polynôme obtenu et de nouvelles suites définies par récurrence...

– On peut aussi considérer la suite (z_k) définie par $z_k = y_k - \alpha_1 \lambda_1^k$ (où α_1 aura été calculé en utilisant

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1). \text{ Ainsi, } z_k = \sum_{j=2}^n \alpha_j \lambda_j^k \text{ et, en supposant que } \alpha_2 \text{ est non nul, on aura alors, de la même}$$

$$\text{façon que ci-dessus, } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{z_{k+1}}{z_k} = \lambda_2.$$

IV.C - Illustration sur un exemple

IV.C.1) Pour la matrice A de l'exemple, on trouve $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$.

IV.C.2) D'après Cayley-Hamilton on a $A^2 = 3A - 2I_2$; la relation de récurrence associée est donc : $y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k$.

IV.C.3) Un petit programme naïf en Maple, où l'on stocke les éléments de la suite dans un tableau, pourrait être le suivant :

```
y[0] := 0 ; y[1] := 1 ;
for k from 0 to 8 do
  y[k+2] := 3*y[k+1] - 2*y[k]
end do;
```

IV.C.4) On peut écrire un programme un peu plus élaboré qui détermine la valeur de l'entier k tel que $\left| \frac{y_{k+2}}{y_{k+1}} - \frac{y_{k+1}}{y_k} \right| < \varepsilon$ où ε est donné, puis qui renvoie la valeur de k et l'approximation obtenue. Pour cela, il suffit de ne stocker à tout instant que les valeurs de y_k, y_{k+1} et y_{k+2} . Puisque $y_0 = 0$, on commencera à $k = 1$:

```

k :=1 :
# les nombres sont donnés en flottant
# sinon Maple fait les calculs dans le corps des rationnels
yk := 1.0 : # représente y[k]
yk1 := 3.0 : # représente y[k+1]
yk2 := 7.0 : # représente y[k+2]
eps := 10(-5) : # erreur entre deux termes successifs, fixée par l'utilisateur
l1 := yk1/yk :
l2 := yk2/yk1 :
while abs(l2-l1) > eps do
  k := k+1 ;
  yk3 := 3*yk2 - 2*yk1 ;
  l1 := l2 ;
  l2 := yk3/yk2 ;
  yk := yk1 ;
  yk1 := yk2 ;
  yk2 := yk3
end do:
print(" rang k = ",k,"valeur approchée = ",l2)

      " rang k = ", 16, "valeur approchée = ", 2.000007629

```