

Question préliminaire

1.a. Pour $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$, le produit AB est bien défini si, et seulement si, $q = r$. En ce cas, $AB \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{C})$ (règle des dominos).

1.b. Pour $q = r$, donc, les règles du produit matriciel donnent $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q=r} a_{i,k} b_{k,j}$.

2.a. & b. Avec les notations de l'énoncé, pour $c_{i,j}^{(p)}$ le terme général de la matrice $A_p + B_p$, $c_{i,j}$ celui de $A + B$, $d_{i,j}^{(p)}$ celui du produit $A_p B_p$ et $d_{i,j}$ celui de AB , on a

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} c_{i,j}^{(p)} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} (a_{i,j}^{(p)} + b_{i,j}^{(p)}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} a_{i,j}^{(p)} + \lim_{p \rightarrow +\infty} b_{i,j}^{(p)} = a_{i,j} + b_{i,j} = c_{i,j} \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} d_{i,j} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(p)} b_{k,j}^{(p)} = \sum_{k=1}^n \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} a_{i,k}^{(p)} \right) \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} b_{k,j}^{(p)} \right) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = d_{i,j}, \end{aligned}$$

en vertu des propriétés classiques des limites (linéarité et passage au produit).

Partie I

1. On calcule

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1/2 + 1/2 \\ 3/4 + 0 + 1/4 \\ 1/8 + 7/8 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1.$$

2. Notons $\lambda_1 = 1$, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A . On a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(A)$ et $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(A) = 11/32$ (pour calculer $\det(A)$, on peut effectuer l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, puis développer par rapport à la première ligne). On en déduit $\lambda_2 + \lambda_3 = -1$ et $\lambda_2 \lambda_3 = 11/32$, donc $(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) = X^2 + X + 11/32$. Le discriminant de ce trinôme est $-\frac{3}{8}$, de racines $-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{8}} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{6}}{8}$, d'où

$$\text{Sp}(A) = \left\{ 1, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{8}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{8} \right\}.$$

Le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, vu que A admet deux valeurs propres non réelles, donc A n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et, *a fortiori*, non diagonalisable sur $\mathbb{R}$. En revanche, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres complexes distinctes dans $\mathbb{C}$, donc est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

3. On a $D^n = \text{diag}(1, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$. Par ailleurs $|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \lambda_2 \overline{\lambda_2} = \lambda_2 \lambda_3 = \frac{\det(A)}{\lambda_1} = 11/32 < 1$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_3^n = 0$, d'où, en notant $\text{diag}(a, b, c)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont a , b et c dans cet ordre :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n = \text{diag}(1, 0, 0).$$

4. Notons X_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i , pour $i \in \{1, 2, 3\}$, X_1 étant le vecteur de la question 1. $\mathcal{B}' = (X_1, X_2, X_3)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$. Notons P la matrice 3×3 ayant ces vecteurs comme colonnes. Il s'agit de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}'$. On a donc $A = PDP^{-1}$.

Par une récurrence immédiate sur n , il vient alors $A^n = PD^nP^{-1}$, puis, en utilisant le résultat de la deuxième question préliminaire :

$$\mathfrak{A} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = P \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n \right) P^{-1} = P \text{diag}(1, 0, 0) P^{-1}.$$

La multiplication à gauche par une matrice diagonale ayant pour effet de multiplier chaque ligne par le coefficient diagonal correspondant, $\text{diag}(1, 0, 0)P^{-1}$ est la matrice dont la première ligne est celle de P^{-1} et les autres, nulles.

Notons $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ la première ligne de P^{-1} . Il vient :

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 1 & \star & \star \\ 1 & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 1 & \star & \star \\ 1 & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

les étoiles désignant des coefficients inconnus. Il s'ensuit qu'il suffit de déterminer la première ligne de P^{-1} . On sait que quand on diagonalise une matrice, les colonnes de la matrice de passage sont des vecteurs propres de la matrice diagonalisée, placés dans le même ordre que les valeurs propres dans la matrice diagonale. Or, la transposition transforme justement lignes en colonnes, tout en inversant l'ordre des produits. Comme $D^T = D$, on a ainsi - en notant U^T la transposée d'une matrice U et en posant $Q = (P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$ -

$$D = P^{-1}AP \iff D^T = P^T A^T (P^{-1})^T \iff D = Q^{-1}A^T Q.$$

Il s'ensuit que la première colonne de Q , qui est la première ligne de P^{-1} , est vecteur propre de A^T pour la valeur propre 1. On calcule alors $E_1(A^T) = \ker(A^T - I_3) = \ker(8(A^T - I_3))$:

$$\begin{aligned} 8(A^T - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} -8x + 6y + z = 0 \\ 4x - 8y + 7z = 0 \\ 4x + 2y - 8z = 0 \end{cases} &\left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \\ &\iff \begin{cases} -10y + 15z = 0 \\ 4x - 8y + 7z = 0 \\ 10y - 15z = 0 \end{cases} &\left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/5 \\ L_3 = -L_1 \leftarrow \emptyset \end{array} \right. \\ &\iff \begin{cases} 2y = 3z \\ 4x = 8y - 7z, \end{cases} \end{aligned}$$

d'où $E_1(A^T) = \text{vect} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, ce qui détermine $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ à une constante multiplicative près. Pour trouver cette dernière, on peut utiliser la relation $P^{-1}P = I_3$. Le seul coefficient calculable du produit $P^{-1}P$ est celui d'indices (1,1), qui vaut $a + b + c$, et donc 1. On en déduit enfin $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \end{pmatrix}$.

Remarque : il y a d'autres façons de déterminer la première ligne de P^{-1} à un coefficient multiplicatif près : écrire la première ligne de $P^{-1}A = DP^{-1}$, ou encore écrire $(\lim A^n) \times A = \lim A^{n+1} = \lim A^n$.

5. La méthode choisie à la question 4 donne la réponse à la question 5 : en transposant la relation $\pi A = \pi$, il vient $A^T \pi^T = \pi^T$, soit $\pi^T \in E_1(A^T)$. La relation $a + b + c = 1$ est précisément celle obtenue ci-dessus, et l'on a donc $\pi = (1/3 \ 2/5 \ 4/15)$. La condition de positivité est inutile.

Partie II

1. On calcule

$$\begin{aligned} (B - I_2)(B - (a + b - 1)I_2) &= \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-b)(a-1+1-a) & -(a-1)^2 + (1-a)^2 \\ (1-b)^2 - (1-b)^2 & (1-a)(1-b+b-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

2.a. La division euclidienne de X^p par P donne deux polynômes réels Q et R tels que $X^p = PQ + R$ avec $\deg R < \deg P = 2$. On peut donc poser $R = \alpha_p X + \beta_p$.

2.b. On évalue l'égalité précédente $X^p = PQ + R$ aux racines de P , qui annulent le produit PQ . Il vient

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 1 = \alpha_p + \beta_p \\ (a + b - 1)^p = \alpha_p(a + b - 1) + \beta_p \end{array} \right. &\left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \\ &\iff \alpha_p = \frac{(a + b - 1)^p - 1}{a + b - 2} \quad \& \quad \beta_p = \frac{(a + b - 1) - (a + b - 1)^p}{a + b - 2}. \end{aligned}$$

Notons que les conditions $a < 1$ et $b < 1$ donnent $a + b - 2 < 0$ et que l'on peut donc diviser par $a + b - 2$ (le système linéaire est de Cramer).

2.c. On injecte B dans la relation polynomiale de la question 2a et on utilise le résultat prouvé en 1. Il vient

$$\begin{aligned} B^p &= P(B)Q(B) + \alpha_p B + \beta_p I_2 = 0 + \alpha_p (B - I_2) + I_2 \\ &= \frac{1}{a + b - 2} \begin{pmatrix} (a-1)(a+b-1)^p + b-1 & ((a+b-1)^p - 1)(1-a) \\ ((a+b-1)^p - 1)(1-b) & (b-1)(a+b-1)^p + a-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. De $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, on tire $-1 < a + b - 1 < 1$, d'où $\lim_p (a + b - 1)^p = 0$. On peut alors passer à la limite dans l'expression de B^p pour obtenir

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} B^p = \frac{1}{a + b - 2} \begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

On pourra noter que, si le but est uniquement d'obtenir cette limite, le calcul explicite de B^p est inutile ; il est plus rapide d'écrire

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} B^p = \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p \right) B + \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \beta_p \right) I_2 = \frac{1}{a + b - 2} [-B + (a + b - 1)I_2] = \frac{1}{a + b - 2} \begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Partie III

1. Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a, par positivité des coefficients de la matrice M ,

$$m_{i,j} \leq \sum_{k=1}^n m_{i,k} = 1.$$

2.a. & b. Soit M une matrice à coefficients positifs. On calcule $MX_1 = Y_1 = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n)^T$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$y_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^n m_{i,j},$$

soit $Y_1 = X_1$ (et donc $X_1 \in E_1(M)$) si, et seulement si, $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$ pour tout i , donc si, et seulement si, la matrice M est stochastique.

2.c. La formule du produit de matrices rappelée au préliminaire montre que le produit conserve la positivité (une matrice est dite positive si tous ses coefficients le sont). Par ailleurs, d'après la question 2.a., si M et M' sont stochastiques, alors $(M'M)X_1 = M'(MX_1) = M'X_1 = X_1$, donc $M'M$ est stochastique en appliquant cette fois la question 2.b.

Remarque : cela se fait aussi très bien directement, en utilisant la formule du produit matriciel.

3.a. Pour $Y = AX$ et $1 \leq i \leq n$, on a

$$|y_i| = \left| \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{i,j} x_j| \leq \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| = \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1,$$

en utilisant successivement l'inégalité triangulaire, les inégalités $|x_j| \leq 1$, puis $m_{i,j} \geq 0$ et enfin le fait que M est stochastique.

3.b. Si X est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ , alors $Y = \lambda X$, donc $y_j = \lambda x_j$ pour tout j . Par hypothèse sur X , il existe i tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = 1$. On a alors $|\lambda| = |y_i| \leq 1$ d'après la question précédente.

3.c. Pour montrer que toutes les valeurs propres sont de module au plus 1 (l'exemple de la première partie montre qu'il faut ici comprendre qu'« inférieur » signifie « inférieur ou égal »), il suffit de justifier que, pour toute valeur propre, il existe un vecteur propre X vérifiant $\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = 1$. De fait, si $Z = (z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_n)^T \in E_\lambda(M)$ est non nul, alors $m = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j| > 0$ et $X = \frac{1}{m} Z \in E_\lambda(A)$ convient.

Exercice de géométrie

1. Soit la surface d'équation cartésienne $yz = 0$. On a $yz = 0$ si, et seulement si, $y = 0$ ou $z = 0$. Le « ou » inclusif logique correspond à une réunion, et la surface est donc la réunion des deux plans de coordonnées $(xOz) \cup (xOy)$.

2. Par symétrie, on peut supposer sans perte de généralité que $\gamma = 0$. Alors,

$$\alpha yz + \beta xz = 0 \iff (\alpha y + \beta x)z = 0,$$

et l'on trouve à nouveau une réunion de deux plans perpendiculaires, le premier d'équation $\beta x + \alpha y = 0$, le deuxième étant (xOy) . Le raisonnement est valable si un deuxième paramètre s'annule et l'on retrouve le résultat de la question précédente comme cas particulier.

3. On note que si (x, y, z) vérifie l'équation de (S) et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ la vérifie aussi. Il s'ensuit que, $M \in (S) \Rightarrow (OM) \subset (S)$, donc que (S) est un cône de sommet O. Ce raisonnement vaut aussi pour le cas particulier étudié à la question 2.

On peut aussi, mais c'est plus long, utiliser la théorie des quadriques. L'équation de (S) n'a qu'une partie quadratique, de matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & 0 & \alpha \\ \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Les trois valeurs propres de cette matrice ont pour somme $\text{tr}(A) = 0$ et pour produit $\det(A) = \frac{1}{4}\alpha\beta\gamma \neq 0$. Il s'ensuit qu'elles sont non nulles et pas toutes de même signe, donc qu'une équation réduite de (S) est de la forme $u^2X^2 + v^2Y^2 - w^2Z^2 = 0$, équation d'une quadrique conique.

4.a. Si, pour un certain réel λ , A est de rang 1, alors ses colonnes sont deux à deux proportionnelles et, *a fortiori*, toute matrice 2×2 extraite de A est de déterminant nul. Il vient alors, en prenant les couples de lignes et de colonnes (1,2), (1,3), puis (2,3) :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \gamma \\ \gamma & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \gamma^2 = 0, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & \beta \\ \beta & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta^2 = 0, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha^2 = 0,$$

ce qui donne bien $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 (= \lambda^2)$.

Réciproquement, supposons $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$. Par symétrie, il suffit de traiter les cas $\alpha = \beta = \gamma$ et $\alpha = \beta = -\gamma$. Dans le premier cas, $\lambda = -\alpha$ donne une matrice dont les trois colonnes sont identiques, donc de rang 1 ; dans le deuxième, $\lambda = \alpha$ donne une matrice dont les deux premières colonnes sont égales entre elles et opposées à la troisième, donc de rang 1 également.

Une preuve plus technique (et un peu hors programme) permet de traiter l'équivalence directement : on calcule

$$\chi_A(x) = -x^3 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x - 2\alpha\beta\gamma, \quad \chi'_A(x) = -3x^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Pour que A admette une valeur propre double, il faut et il suffit que l'une des racines de χ'_A soit racine de χ_A , dont elle est alors racine double. En reportant, on constate que c'est le cas si, et seulement si, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$, donc si $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$ d'après le cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique.

4.b. Une équation réduite de (S) est $u^2X^2 + v^2Y^2 - w^2Z^2 = 0$ où u^2 , v^2 et $-w^2$ sont les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité (ou celles de $-A$ si A compte deux valeurs propres négatives). Si $u^2 = v^2$, le cône est de révolution d'axe (OZ) . Réciproquement, un cône de révolution admet une équation de ce type, ce qui implique que A ait une valeur propre double. En remarquant que A ne peut avoir de valeur propre triple car cela équivaut à $\alpha = \beta = \gamma = 0$, on a donc bien équivalence entre :

- (S) est une surface de révolution ;
- A admet une valeur propre double (il existe un réel λ tel que $\text{rg}(A - \lambda I_3) = 1$) ;
- $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$.

5. Quitte à diviser l'équation par α , on peut supposer $\alpha = \beta = \gamma = 1$. On obtient alors pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, qui est stochastique. La question III.2 montre que 1 en est valeur propre avec une droite propre

dirigée par $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Par ailleurs, la question 4 montre que A admet une valeur propre double et l'on observe que la somme des valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité est $\text{tr}(A) = 0$. Si 1 était la valeur propre double, la dernière valeur propre serait -2, ce qui contredirait la question III.3.c. On en déduit que la valeur propre double est -1/2 (c'est aussi une valeur propre double évidente, mais autant utiliser ici les résultats démontrés précédemment). Ainsi, (S) est la surface de révolution d'axe dirigé par $\vec{u}$ et d'équation réduite $X^2 - (Y^2 + Z^2)/2 = 0$, donc le cône de révolution de sommet O, dirigé par $\vec{u}$, et d'angle $\arctan \sqrt{2}$.