I Polynômes de Tchebytchev

I.A -

I.A.1) On a $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ et donc : $\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$

On va montrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos n\theta$ est un polynôme de degré n en $\cos\theta$, de coefficient dominant 2^{n-1}.

$\cos\theta = \cos\theta$ et $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ prouve la propriété aux rangs 1 et 2.

On l'admet jusqu'au rang n avec $n \geqslant 2$, et on le montre au rang $n+1$.

$$\cos(n+1)\theta = \underbrace{2\cos\theta\cos n\theta}_{\substack{\text{polynôme de degré } n+1 \text{ en } \cos\theta,\\ \text{de coefficient dominant } 2^n}} - \underbrace{\cos(n-1)\theta}_{\text{polynôme de degré } n-1}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$ et donc démontrée.

Ceci prouve, comme l'indique l'énoncé, que f_n est une fonction polynomiale.

I.A.2) En fait, dans la récurrence, c'est P_n sur lequel on a raisonné, donc T_n est de degré n de coefficient dominant $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

I.A.3) On a déjà vu sous une autre forme que $P_1(X) = X$ et que $P_2(X) = 2X^2 - 1$, on en déduit facilement, en utilisant la relation de récurrence, que $P_3(X) = 4X^3 - 3X$ et $P_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$, ce qui donne :

$T_1(X) = X \qquad T_2(X) = X^2 - \dfrac{1}{2} \qquad T_3(X) = X^3 - \dfrac{3}{4}X \qquad T_4(X) = X^4 - X^2 + \dfrac{1}{8}$

I.A.4) Cette propriété a été montrée (et utilisée...) à la première question.

I.A.5) On a $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \arccos x) \Leftrightarrow n\arccos x = \dfrac{2k-1}{2}\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \arccos x = \dfrac{2k-1}{2n}\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Maintenant, $x \in [-1,1]$, il suffit que l'angle décrive $[0,\pi]$, c'est à dire $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, chaque racine est décrite exctement une fois.

$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi$ avec $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

De plus, on a n racines pour un polynôme de degré n, on a donc toutes les racines et elles sont simples.

I.A.6) Les extrémums de f_n sont évidemment $\dfrac{\pm 1}{2^{n-1}}$ obtenus pour $x = \cos\dfrac{k}{n}\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, mais, comme à la question précédente, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ permet d'avoir exactement une fois chaque extrémum, car $x \in [-1,1]$.

Ce sont aussi exactement, pour $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, les points qui annulent la dérivée, dérivée qui change d'ailleurs à chaque fois de signe.

Les 2 autres points sont $x = 1$ et $x = -1$.

I.A.7) On va travailler en Maple.

La procédure décrite ne fonctionnera que pour $n \geqslant 2$. On utilise aussi $P_0(X) = 1$.

On calcule successivement les polynômes P_2 à P_n en utilisant la relation de récurrence du 4) avec 3 polynômes `P,Q,R` qui, à un rang donné, sont P_{k-1}, P_k et P_{k+1}.

```
> Tcheb:=proc(n)
    local P,Q,R;
    P:=1;Q:=X;
        from 2 to n do
        R:=sort(expand(2*X*Q-P));P:=Q;Q:=R
        od;
    Q
    end;
```

I.B -

I.B.1) Les variations de f_1, f_2, f_3, f_4 s'obtiennent facilement compte tenu de la recherche des extrémums effectuée. On n'utilise pas ici la parité ou l'imparité.

Voici les tableaux de variation :

f_1 :

x	-1		1
f_1'		$+$	
f_1	-1	$\nearrow$	1

f_2 :

x	-1		0		1
f_2'		$-$		$+$	
f_2	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

f_3 :

x	-1		-$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
f_3'		$+$		$-$		$+$	
f_3	$-\frac{1}{2^2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2^2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{2^2}$

f_4 :

x	-1		-$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
f_4'		$-$		$+$		$-$		$+$	
f_4	$\frac{1}{2^3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2^3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2^3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2^3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2^3}$

I.B.2) On élimine tout de suite le cas où $T_n - P$ est nul puisqu'alors $\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Dans les autres cas, $T_n - P$ est de degré $n-1$ au plus et ne peut donc changer de signe plus de $n-1$ fois.

Comme T_n a $n+1$ extrémums, avec entre 2 extrémums un changement de signe, pour un des extrémums au moins, $T_n - P$ et T_n n'ont pas le même signe.

Par exemple, $T_n(x_j) - P(x_j) \leqslant 0$ avec $T_n(x_j) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, alors $P(x_j) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et P ne convient pas.

Dans l'autre cas, on aura $P(x_j) \leqslant -\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

On a donc montré que si P est unitaire de degré n, $\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

I.B.3) Si P est unitaire de degré n, $\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} = \sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)|$, la propriété est immédiate.

I.B.4) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue donc localement intégrable sur $]-1,1[$, le problème de convergence est en -1 et en 1.

Mais l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ converge en -1 et en 1 car une primitive $\arcsin x$ a une limite fine en -1 et 1.

$\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue donc localement intégrable sur $]-1,1[$, le problème de convergence est en -1 et en 1.

D'autre part, f continue sur $[-1,1]$ est bornée par M et $\left|\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant M\,\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ prouve la convergence de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ par les critères de comparaison et convergence absolue.

I.B.5) -

a) La convergence de ces intégrales est évidente, le produit de fonctions continues étant continu.
La linéarité par rapport à la première variable découle de la linéarité des intégrales convergentes.
La symétrie découle de la commutativité du produit des réels.
La forme est bilinéaire symétrique.
La positivité découle de la positivité de l'intégrale généralisée, les bornes sont bien dans le bon sens.
Il reste à montrer que la forme quadratique est définie-positive.
$\dfrac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est **continue, positive et d'intégrale nulle** sur $]-1,1[$,

d'où $\forall x\in\left]-1,1\right[,\ \dfrac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}=0$, ce qui donne $\forall x\in\left]-1,1\right[,\ f(x)=0$, et comme f est continue en -1 et 1, $\forall x\in[-1,1],\ f(x)=0$. f est bien la fonction nulle.

$(f,g)\longmapsto\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{C}\left([-1,1],\mathbb{R}\right)$.

b) On va montrer que la famille$\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale et calculer la norme de ces "vecteurs". On va faire le changement de variable $\theta=\arccos x$ qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$, les deux intégrales sont de même nature, donc convergentes et égales, compte tenu de ce qui précède. On a donc :

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)P_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}\cos n\theta\cos m\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos\left(n+m\right)\theta+\cos\left(n-m\right)\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)P_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=0+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos\left(n-m\right)\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

On a maintenant 2 cas : si $n-m\neq 0$, l'intégrale est nulle et si $n=m$, l'intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

La famille$\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale et $\|P_n\|=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

La famille$\left(h_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien orthonormale.

II Diamètres

II.A -

II.A.1) $d\left(A,B\right)=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$ est une fonction continue de x_A, y_A, x_B, y_B, elles mêmes fonctions continues de A et B.

On a donc $(A,B)\mapsto d\left(A,B\right)$ continue sur $E\times E$

et, de plus, $(A,B,C)\mapsto d\left(A,B,C\right)$ continue sur $E\times E\times E$ par produit et composée de fonctions continues.

$E\times E$ et $E\times E\times E$ sont des fermés-bornés.

Comme une fonction continue sur un fermé-borné est bornée et atteint ses bormes, d_2 et d_3 sont bien définis.

II.A.2) On a $AB\times AC\times BC\leqslant\displaystyle\sup_{(A,B)\varepsilon E^2}(AB)\times\sup_{(A,C)\varepsilon E^2}(AC)\times\sup_{(B,C)\varepsilon E^2}(BC)=d_2^3$.

Ceci est vrai pour tous les points A,B,C et donc vrai pour le sup et donc $d_3^3\leqslant d_2^3$ et enfin $d_3\leqslant d_2$.

II.A.3) On a successivement : $d\left(A,B,C\right)\leqslant\displaystyle\sup_{C\in E}d\left(A,B,C\right)\leqslant\sup_{(A,B)\varepsilon E^2}\left(\sup_{C\in E}d\left(A,B,C\right)\right)$.

Ceci est vrai pour tous les points A,B,C et donc vrai pour le sup

et donc $d_3\leqslant\displaystyle\sup_{(A,B)\varepsilon E^2}\left(\sup_{C\in E}d\left(A,B,C\right)\right)$.

D'autre part : $d\left(A,B,C\right)\leqslant d_3$ et donc $\displaystyle\sup_{C\in E}d\left(A,B,C\right)\leqslant d_3$

et enfin $\displaystyle\sup_{(A,B)\varepsilon E^2}\left(\sup_{C\in E}d\left(A,B,C\right)\right)\leqslant d_3$.

Finalement : $d_3=\displaystyle\sup_{(A,B)\varepsilon E^2}\left(\sup_{C\in E}d\left(A,B,C\right)\right)$.

II.B On prend A,C,B alignés dans cet ordre sur le segment $[0,a]$, ceci n'est pas une restriction car les rôles de A,B,C sont interchangeables.

Les 2 points A et B doivent bien sûr être aux extrémités du segment... En effet, si par exemple B n'est pas à l'extrémité, en le déplaçant vers l'extrémité, on augmente AB et BC, AC restant constant...

On cherche donc $\displaystyle\sup_{x\in[0,a]}\sqrt[3]{a\,x\left(a-x\right)}$ qui est obtenu pour $x=\dfrac{a}{2}$ en annulant par exemple la dérivée. On a bien $d_3=\dfrac{a}{\sqrt[3]{4}}$.

II.C -

II.C.1) On appelle I le milieu de AB, OI est la bissectrice de $(\widehat{OA, OB})$ les triangles OIA et OIB sont rectangles en I, et donc $IA = IB = R\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, qui est bien positif,

ce qui donne enfin $AB = 2R\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

II.C.2) Pour $\beta=\alpha$ ou $\beta=\gamma$, on a $\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}=0$. Par ailleurs cette quantité est positive, son maximum sera en un point où la dérivée par rapport à β est nulle. On a donc :

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}-\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=0$$

Ou encore : $\sin\left(\dfrac{\alpha+\gamma-2\beta}{2}\right)=0$, ce qui donne : $\dfrac{\alpha+\gamma-2\beta}{2}=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}-k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, finalement $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ compte tenu des conditions fixées $(\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma)$.

Ce maximum est : $\sin^2\dfrac{\gamma-\alpha}{4}$.

II.C.3) $\varphi(t)=t^3\sqrt{1-t^2}$ est positif, nulle en 0 et en 1.

La dérivée $\varphi'(t)=3t^2\sqrt{1-t^2}-\dfrac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{3t^2-4t^4}{\sqrt{1-t^2}}$ s'annule, outre en 0, en $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C'est en ce point qu'est le maximum qui vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$. φ est croissante puis décroissante.

II.C.4) Il suffit, en utilisant II.A.3), de chercher $\displaystyle\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\gamma\leqslant 2\pi}\sqrt[3]{8R^3\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{4}}$,

on pose $t=\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{4}$ qui décrit $[0,1]$,

$$\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}=2\sin\frac{\gamma-\alpha}{4}\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}=2\sin\frac{\gamma-\alpha}{4}\sqrt{1-\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{4}}=2t\sqrt{1-t^2}.$$

Cela revient donc à chercher $\displaystyle\sup_{t\in[0,1]}\sqrt[3]{16R^3t^3\sqrt{1-t^2}}=\sqrt[3]{16R^3\frac{3\sqrt{3}}{16}}=R\sqrt{3}$.

III Suite des diamètres d'un segment

III.A -

III.A.1) Par composée et produit de fonctions continues, la fonction : $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\mapsto\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}|x_j-x_i|$ est continue sur E^n qui est fermé-borné.

Elle est donc bornée et atteint ses bornes.

Il existe donc $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}\in E$ tels que $D_{n+1}=D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1})$.

III.A.2) On a $D_{n+1}=|\lambda_2-\lambda_1|\,|\lambda_3-\lambda_1|\ldots|\lambda_n-\lambda_1|\displaystyle\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}|\lambda_j-\lambda_i|$ en séparant les λ_1 des autres valeurs.

Or $\displaystyle\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}|\lambda_j-\lambda_i|\leqslant D_n$ puisque celui-ci est le sup des produits de ce type; λ_2 étant une valeur particulière de x_1, ..., λ_{n+1} une valeur particulière de x_n.

On a donc : $D_{n+1}\leqslant|\lambda_2-\lambda_1|\,|\lambda_3-\lambda_1|\ldots|\lambda_n-\lambda_1|\;D_n$.

III.A.3) La relation précédente s'écrit aussi : $D_{n+1}\leqslant\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n+1\\ j\neq 1}}|\lambda_j-\lambda_1|\;D_n$.

Grâce aux valeurs absolues, on a aussi : $D_{n+1}\leqslant\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant n+1\\ l\neq k}}|\lambda_l-\lambda_k|\;D_n$, en séparant cette fois tous les λ_k, qu'ils soient en première ou deuxième position dans $|\lambda_j-\lambda_i|$.

On réindexe cette relation : $D_{n+1} \leqslant \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n+1 \\ j \neq i}} |\lambda_j - \lambda_i| \ D_n$.

En multipliant toutes ces inégalités entre nombres positifs, de $i = 1$ à $n+1$,

on obtient : $D_{n+1}^{n+1} \leqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \left(\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n+1 \\ j \neq i}} |\lambda_j - \lambda_i| \right) D_n^{n+1}$.

Compte tenu de la valeur absolue $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \left(\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n+1 \\ j \neq i}} |\lambda_j - \lambda_i| \right) = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} |\lambda_j - \lambda_i| \right)^2 = D_{n+1}^2$,

chaque terme du produit étant obtenu 2 fois en $|\lambda_j - \lambda_i|$ et en $|\lambda_i - \lambda_j|$.

Finalement : $D_{n+1}^{n+1} \leqslant D_{n+1}^2 \, D_n^{n+1}$ et D_{n+1} étant non nul, $D_{n+1}^{n-1} \leqslant D_n^{n+1}$.

III.A.4) On écrit la relation précédente : $D_{n+1} \leqslant D_n^{\frac{n+1}{n-1}}$

On a $d_{n+1} = D_{n+1}^{\frac{2}{n(n+1)}} \leqslant \left(D_n^{\frac{n+1}{n-1}} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} = D_n^{\frac{2}{n(n-1)}} = d_n$, la suite $(d_n)_{n \geqslant 2}$ est donc décroissante, comme elle est positive, elle est minorée par 0 et converge.

III.B -

III.B.1) On a vu dans la première partie que $\mu(P) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et que cette valeur était atteint pour $P = T_n$.

Donc $\mu_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $m_n = \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$.

III.B.2) Quand $n \to +\infty$, $\dfrac{n-1}{n} \to 1$ et $m_n \to \dfrac{1}{2}$.

La suite $(m_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers $m = \dfrac{1}{2}$.

III.B.3) On se place dans le cas où $l = 0$, on a donc : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \qquad |u_n| \leqslant \varepsilon$.

On prend $n \geqslant N$,

$$\left| \frac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n\,(n+1)} \right| \leqslant \frac{|u_1 + 2\,u_2 + \cdots + (N-1)\ u_{N-1}|}{n\,(n+1)} + \frac{N + (N+1) + \cdots + n}{n\,(n+1)} \varepsilon$$

et finalement $\left| \dfrac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n\,(n+1)} \right| \leqslant \dfrac{|u_1 + 2\,u_2 + \cdots + (N-1)\ u_{N-1}|}{n\,(n+1)} + \dfrac{\varepsilon}{2}$

car $N + (N+1) + \cdots + n \leqslant \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Mais $\dfrac{|u_1 + 2\,u_2 + \cdots + (N-1)\ u_{N-1}|}{n\,(n+1)} = \dfrac{S_N}{n\,(n+1)} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On a donc, à partir d'un certain rang N', $\quad \dfrac{|u_1 + 2\,u_2 + \cdots + (N-1)\ u_{N-1}|}{n\,(n+1)} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$,

et donc, pour $n \geqslant \max(N, N')$, on a $\left| \dfrac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n\,(n+1)} \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ceci montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n\,(n+1)} = 0$.

Dans les autres cas, on pose $v_n = u_n - l$ qui tend donc vers 0.

$$\frac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n\,(n+1)} = \frac{(v_1 + l) + (2\,v_2 + 2\,l) + \cdots + (n\,v_n + n\,l)}{n\,(n+1)}$$

$$\frac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n\,(n+1)} = \frac{v_1 + 2\,v_2 + \cdots + n\,v_n}{n\,(n+1)} + \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n\,(n+1)}\, l$$

$$\frac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n\,(n+1)} = \underbrace{\frac{v_1 + 2\,v_2 + \cdots + n\,v_n}{n\,(n+1)}}_{\to 0 \text{ quand } n \to +\infty} + \frac{l}{2} \text{ de limite } \frac{l}{2} \text{ à l'infini.}$$

III.C -

III.C.1) On considère le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \cdots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix}$.

On a : $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

A la derniére ligne, de rang $n+1$, on enlève successivement :

- a_{n-1} fois l'avant dernière, de rang n,
- ...
- a_0 fois la première, de rang 1.

Ceci ne change pas le déterminant.

On se retrouve donc avec : $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \cdots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = V(x_1, \ldots, x_{n+1})$

III.C.2) On développe, comme indiqué, selon la derniére ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \cdots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2} P(x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+n} P(x_{n+1}) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Dans les déterminants intermédiaires obtenus, il manque une colonne intermédiaire...

En valeur absolue, chacun des derniers déterminants obtenus est majoré par D_n et chaque $|P(x_i)|$ est majoré par $\mu(P)$. Ce qui donne :

$$\text{abs}\left(\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}\right) \leqslant (n+1)\ D_n\,\mu(P).$$

Ceci est aussi vrai pour le sup, qui n'est que D_{n+1}, et donc : $D_{n+1} \leqslant (n+1)\ D_n\,\mu(P)$.

Finalement : $d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant (n+1)\ d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}\ m_n^n$.

III.C.3) On a : $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} |x_j - x_i| = |x_{n+1} - x_1|\,|x_{n+1} - x_2|\ \ldots |x_{n+1} - x_n| \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_j - x_i|$ obtenu en séparant les termes en x_{n+1}.

Ce qui donne $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} |x_j - x_i| = |P(x_{n+1})| \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_j - x_i|$ en utilisant la notation de l'énoncé.

Le terme de gauche est majoré par D_{n+1}. On a donc $D_{n+1} \geqslant |P(x_{n+1})| \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_j - x_i|$.

Ceci est aussi vrai pour le sup de l'expression de droite, qui est le produit des sup car les x_i de chacun des termes sont indépendants. On a donc : $D_{n+1} \geqslant D_n \, \mu(P)$.

Finalement $d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \, m_n^n \leqslant d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

III.C.4) On a : $d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \, m_n^n \leqslant d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

qu'on réécrit $d_n^{\frac{n-1}{2}} \, m_n \leqslant d_{n+1}^{\frac{n+1}{2}} = d_{n+1}^{\frac{n-1}{2}} \, d_{n+1} \leqslant d_n^{\frac{n-1}{2}} \, d_{n+1}$ car $d_{n+1} \leqslant d_n$.

Or $d_n \neq 0$ car obtenu à partir d'un sup de quantités dont certaines sont strictement positives.

On a donc : $m_n \leqslant d_{n+1}$. Ce qui prouve aussi que $m = \dfrac{1}{2} \leqslant d$.

III.C.5) On réécrit la relation du II.C.2), établie entre nombres positifs, en l'élevant à la puissance $\dfrac{1}{n}$: $d_{n+1}^{\frac{n+1}{2}} \leqslant (n+1)^{\frac{1}{n}} \, d_n^{\frac{n-1}{2}} \, m_n$.

On en prend le logarithme : $\dfrac{n+1}{2} \ln d_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n} \ln(n+1) + \dfrac{n-1}{2} \ln d_n + \ln m_n$.

On somme ces relations de $n = 2$ à N.

$\sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{n+1}{2} \ln d_{n+1} \leqslant \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n} \ln(n+1) + \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{n-1}{2} \ln d_n + \sum\limits_{n=2}^{N} \ln m_n$.

On réindexe la première expression : $\sum\limits_{n=3}^{N+1} \dfrac{n}{2} \ln d_n \leqslant \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n} \ln(n+1) + \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{n-1}{2} \ln d_n + \sum\limits_{n=2}^{N} \ln m_n$.

On simplifie les termes en $\dfrac{n}{2} \ln d_n$ présents des 2 cotés.

$\dfrac{N+1}{2} \ln d_{N+1} \leqslant \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n} \ln(n+1) + \ln d_2 + \sum\limits_{n=2}^{N} -\dfrac{1}{2} \ln d_n + \sum\limits_{n=2}^{N} \ln m_n$.

On divise maintenant par $N-1$:

$$\frac{N+1}{2(N-1)} \ln d_{N+1} \leqslant \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \ln(n+1)}{N-1} + \frac{\ln d_2}{N-1} - \frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} \ln d_n}{N-1} + \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} \ln m_n}{N-1}.$$

On utilise maintenant une propriété plus simple que celle indiquée au III.B3),

à savoir $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = l$ quand $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

La démonstration de cette propriété est du même type qu'au III.B.3).

Ainsi $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \ln(n+1)}{N-1} = 0$, $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{n=2}^{N} \ln d_n}{N-1} = \ln d$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{n=2}^{N} \ln m_n}{N-1} = \ln m$.

On passe à la limite dans l'inégalité et : $\dfrac{1}{2} \ln d \leqslant -\dfrac{1}{2} \ln d + \ln m$, ou encore : $\ln d \leqslant \ln m$.

Finalement, $d \leqslant m$ car le logarithme est croissant, et, compte tenu de la question précédente, $d = m = \dfrac{1}{2}$.

Fin du corrigé.

Auteur : Christophe Caignaert, Lycée Colbert, Parvis Colbert 59200 Tourcoing.

`http://c.caignaert.free.fr`