

Intégrale de Gauss et développements en séries entières

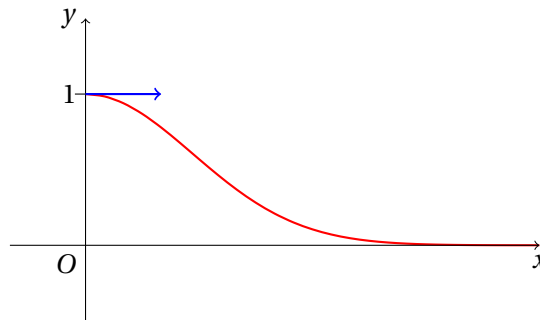
Partie I – Existence de F et de I

1. a. La fonction f est dérivable (et même de classe \mathcal{C}^∞) car composée de fonctions usuelles dérivables. Et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $f(x) = -2xe^{-x^2}$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et on a le tableau de variation suivant (la valeur en 0 et la limite en $+\infty$ étant évidentes) :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1	0

Remarque. Le sens de variation de f peut être également justifié sans dérivation, en notant simplement que f est la composée des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x$ et \exp (qui sont respectivement croissante, décroissante et croissante).

- b. La courbe de f admet en $(0, 1)$ une demi-tangente de pente $f'(0) = 0$ et l'axe (Ox) est asymptote en $+\infty$.



2. La fonction F est bien définie car pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur le segment $[0, x]$ donc son intégrale sur $[0, x]$ est bien définie (il s'agit d'une intégrale propre).

Nous allons ensuite utiliser le théorème suivant :

Si h est une fonction continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$ alors la fonction H définie sur I par $H(x) = \int_a^x h(t) dt$ est l'unique primitive de h qui s'annule au point a . De plus, la fonction H est de classe \mathcal{C}^1 puisque $H' = h$ est continue.

On utilise ce théorème avec la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi, F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $F'(x) = e^{-x^2}$.

3. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale I est impropre uniquement en $+\infty$. Par relation de Chasles, cette intégrale I est donc de même nature que :

$$J = \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Pour déterminer la nature de J , commençons par remarquer que pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a $t^2 \geq t$ et donc :

$$0 \leq f(t) = e^{-t^2} \leq e^{-t}$$

Par ailleurs, on sait que l'intégrale suivante est convergente (elle fait partie des intégrales de référence du programme) :

$$K = \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$$

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives, on en déduit que J , (et donc I) est convergente.

Partie II – Calcul de I : première méthode

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, 1]$ posons :

$$k(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$$

1. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto k(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$ (car composée de fonctions usuelles continues) donc son intégrale $G(x)$ est bien définie (il s'agit d'une intégrale propre).

Nous allons ensuite appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral (dans sa version \mathcal{C}^1). Vérifions les hypothèses :

- Pour tout $t \in [0, 1]$ fixé, la fonction $x \mapsto k(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ (car composée de fonctions usuelles de classe \mathcal{C}^1) et on a :

$$\forall t \in [0, 1], \forall x \in [0, +\infty[, \quad \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$$

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$ fixé, les fonctions $t \mapsto k(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $[0, 1]$ (car composées de fonctions usuelles continues).

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$ fixé, les fonctions $t \mapsto k(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables sur $[0, 1]$ car ce sont des fonctions continues sur un segment.

Remarques :

– l'intégrabilité de $t \mapsto k(x, t)$ sur $[0, 1]$ a déjà été justifiée au tout début de cette question ;

– l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)$ sur $[0, 1]$ est de toute façon conséquence de l'hypothèse de domination ; il est donc tout à fait inutile de la vérifier séparément (il s'agit d'un fait général, non spécifique à ce problème).

- **Domination de la dérivée partielle :** comme le suggère l'énoncé, pour tout $a > 0$, on se limite à $x \in [0, a]$. Cela permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\forall x \in [0, a], \forall t \in [0, 1], \quad \left| \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) \right| = 2xe^{-x^2(1+t^2)} \leq 2a$$

Il s'agit bien d'une inégalité de « domination » car la fonction constante $2a$ est évidemment intégrable sur le segment $[0, 1]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction G est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, a]$. Cela étant vrai pour tout réel $a > 0$, on en déduit que G est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. De plus, G' se calcule en dérivant sous l'intégrale :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad G'(x) = \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$$

2. a. La fonction H est dérivable car F et G le sont et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a :

$$G'(x) = 2F'(x)F(x) + G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$$

Pour $x > 0$ on réalise alors le changement de variable $u = tx$ dans la seconde intégrale, ce qui donne :

$$G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \frac{1}{x} du$$

La variable d'intégration étant muette, cela se simplifie en :

$$\forall x > 0, \quad H'(x) = 0$$

L'égalité précédente étant évidente pour $x = 0$, on en déduit que H' est identiquement nulle sur $[0, +\infty[$ et donc que H est constante sur cet intervalle.

b. On peut calculer la constante en 0 :

$$H(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\operatorname{Arctan}(t) \right]_{t=0}^{t=1} = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$$

3. a. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, 1]$ écrivons tout d'abord :

$$0 < 1 \leq 1 + t^2 \quad (1)$$

En inversant l'inégalité (1) on obtient :

$$0 < \frac{1}{1 + t^2} \leq 1 \quad (2)$$

En multipliant (1) par $-x^2$ (qui est négatif) et en appliquant la fonction exponentielle (qui est croissante) on obtient :

$$e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-x^2} \leq 1 \quad (3)$$

En multipliant les inégalités (2) et (3) on obtient donc :

$$0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2} \leq e^{-x^2} \quad (4)$$

En intégrant terme à terme cette dernière inégalité par rapport à t sur $[0, 1]$ on en déduit que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq G(x) \leq e^{-x^2}$$

D'après le théorème d'encadrement (parfois appelé « théorème des gendarmes ») on en déduit que :

$$G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

b. Par définition d'une intégrale impropre convergente, on a :

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} I$$

Par opérations sur les limites on a donc :

$$H(x) = F^2(x) + G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} I^2 + 0 = I^2$$

Par unicité de la limite on a donc :

$$I^2 = \frac{\pi}{4}$$

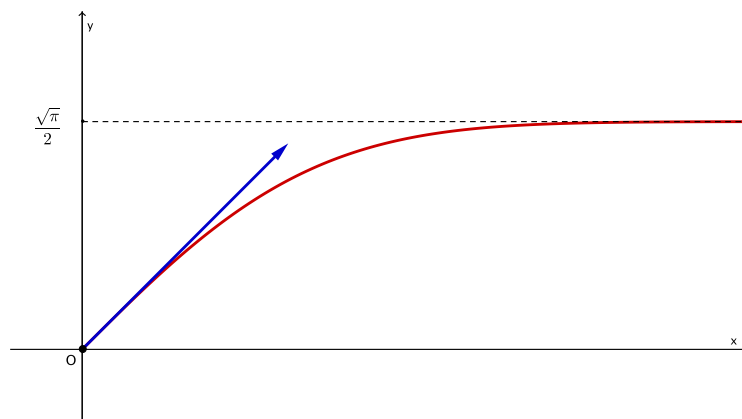
L'intégrale I étant clairement positive (intégrale d'une fonction positive) on en déduit que :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4. On a vu à la question I.2 que F était dérivable avec :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F'(x) = e^{-x^2}$$

On en déduit que F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que sa courbe représentative possède en $(0, 0)$ une demi-tangente de pente $e^0 = 1$. Par ailleurs, F ayant pour limite $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en $+\infty$, cette courbe possède une asymptote horizontale en $+\infty$ (d'équation $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).



Partie III – Calcul de I : deuxième méthode

1. Le quart de disque $D(R)$ est décrit en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \text{ avec } (r, \theta) \in [0, R] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Cette description n'est pas bijective mais elle peut facilement le devenir si on supprime le point $(0, 0)$. En fonction de l'énoncé du théorème de changement de variable donné dans le cours (notamment dans le cas des coordonnées polaires), cela n'est pas vraiment indispensable car un point « n'a pas d'épaisseur ».

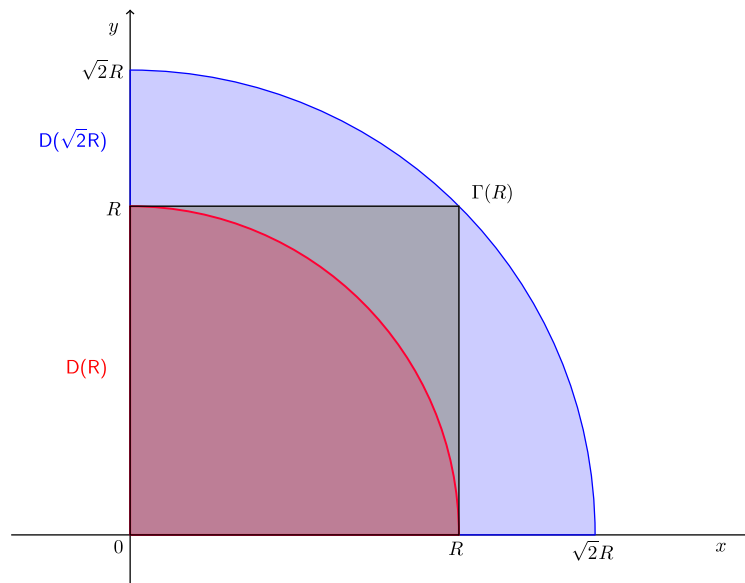
L'esprit du programme est de n'accorder aucune importance à la justification théorique et de ne s'attacher qu'au calcul suivant :

$$\begin{aligned} J(R) &= \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{[0, R] \times [0, \frac{\pi}{2}]} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r e^{-r^2} dr \right) d\theta \\ &= -\frac{\pi}{4} \int_0^R (-2r) e^{-r^2} = -\frac{\pi}{4} \left[e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

2. Pour tout $R > 0$ on a :

$$K(R) = \iint_{[0, R] \times [0, R]} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) \times \left(\int_0^R e^{-y^2} dy \right) = F^2(R)$$

3. a. D'après le théorème de Pythagore, la diagonale du carré $\Gamma(R)$ vaut $\sqrt{2}R$. On en déduit la double inclusion $J(R) \subset \Gamma(R) \subset J(\sqrt{2}R)$, illustrée par le croquis suivant :



b. La fonction $(x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ étant positive, la double inclusion $J(R) \subset \Gamma(R) \subset J(\sqrt{2}R)$ implique l'encadrement suivant :

$$\iint_{J(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{\Gamma(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{J(\sqrt{2}R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

c'est à dire :

$$J(R) \leq K(R) \leq J(\sqrt{2}R)$$

4. Faisons tendre R vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} J(R) &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} \\ J(\sqrt{2}R) &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Compte-tenu de l'inégalité de la question précédente, d'après le théorème d'encadrement (ou « des gendarmes ») cela implique :

$$K(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$$

5. D'après la question III.2 on a donc :

$$F(R) = \sqrt{K(R)} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = I$$

On retrouve la valeur de I que l'on a calculée dans la partie II.

Partie IV – Développement en séries entières

1. a. La fonction exponentielle est développable en série entière sur \mathbb{R} et pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, un substituant $-x^2$ à u dans l'égalité précédente on obtient :

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

Cette dernière égalité prouve que f est développable en série entière sur \mathbb{R} .

2. Nous allons utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. En voici l'énoncé précis.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Alors :

- sa fonction somme s définie sur $] -R, R[$ par $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$;
- la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence R et sa fonction somme S est l'unique primitive de s sur $] -R, R[$ qui s'annule en 0 ;

Dans ce problème, F est la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0 (cela a déjà été justifiée sur $[0, +\infty[$ à la question I.2 mais l'argument reste valable sur \mathbb{R} tout entier). Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a donc :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$$

3. a. Pour tout $x \in] -R, R[$ on a (par énoncé) :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

D'après le théorème de dérivation terme à terme, sur l'intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$ on a également :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Si on suppose que y est solution de (E) alors pour tout $x \in] -R, R[$ on a :

$$\begin{aligned} y'(x) - 2xy(x) &= 1 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

On fait alors le changement d'indice $k = n - 1$ dans la première somme et $k = n + 1$ dans la seconde. Puis on renomme immédiatement les indices pour ne garder que la lettre n (cela ne pose aucun problème, les indices de sommation étant muets) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} x^n = 1$$

En isolant le premier terme de la première somme, puis en réunissant les deux sommes, on a donc, pour tout $x \in] -R, R[$:

$$(a_1 - 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1) a_{n+1} - 2a_{n-1} \right) x^n = 0$$

Par identification (on sait qu’une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls), on en déduit que :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

b. Démontrons tout d’abord que les termes d’indices pairs, *i. e.* les termes a_{2k} sont nuls. On raisonne pour cela par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $k = 0$ on a bien $a_0 = 0$ (par énoncé).
- **Hérédité.** Démontrons que la propriété au rang k , c’est à dire $a_{2k} = 0$ implique la propriété au rang $k + 1$. Il suffit pour cela d’utiliser la relation (5) :

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = a_{(2k+1)+1} = \frac{2}{2k+2} a_{2k} = \frac{2}{2k+2} \cdot 0 = 0$$

Démontrons ensuite (encore par récurrence) la formule donnée par l’énoncé pour les termes d’indices impairs.

- **Initialisation.** Pour $k = 0$ on a, d’une part, $a_1 = 1$ (d’après le résultat de la question précédente) et, d’autre part :

$$\frac{2^{2 \cdot 0} \cdot 0!}{2 \cdot 0 + 1} = 1$$

- **Hérédité.** Démontrons que la propriété au rang k , implique la propriété au rang $k + 1$. Pour cela, on utilise à nouveau la relation (5) :

$$\begin{aligned} a_{2k+3} = a_{(2k+2)+1} &= \frac{2}{2k+3} a_{2k+1} = \frac{2}{2k+3} \frac{2^{2k} k!}{(2k+1)!} = \frac{2}{2k+3} \frac{2k+2}{2k+2} \frac{2^{2k} k!}{(2k+1)!} \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2^{2k} (k+1) k!}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!} = \frac{2^{2k+2} (k+1)!}{(2k+3)!} \end{aligned}$$

c. Pour $x = 0$, la série est trivialement convergente. Si $x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \left| \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| = |a_{2n+1} x^{2n+1}|$$

On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{2n+3} x^{2n+3}|}{|a_{2n+1} x^{2n+1}|} = \left| \frac{\frac{2}{2n+3} a_{2n+1} x^{2n+3}}{a_{2n+1} x^{2n+1}} \right| = \frac{2}{2n+1} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La limite obtenue étant toujours nulle, d’après la règle de d’Alembert, la série $\sum u_n$ est convergente pour toute valeur de x . On en déduit que la série entière étudiée est absolument convergente sur \mathbb{R} . Son rayon de convergence est donc $+\infty$.

Pour la suite, notons z la somme de la série entière précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

La variable x n’apparaissant qu’avec des exposants impairs, on a évidemment $z(0) = 0$. Reste à vérifier que z est bien solution de l’équation (E). Le calcul qui suit est essentiellement la réciproque de celui effectué dans la question **3.a**. On utilise pour cela le théorème de dérivation terme à terme pour exprimer z' :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_{2n+1} x^{2n}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a alors :

$$z'(x) - 2xz(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_{2n+1} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_{2n+1} x^{2n+2} \tag{6}$$

Pour pouvoir simplifier cette expression, on effectue le changement d'indice $k = n + 1$ dans la seconde somme puis on renomme immédiatement ce nouvel indice k à l'aide de la lettre n (les indices étant muets) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_{2n+1}x^{2n+2} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2a_{2k-1}x^{2k} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{2n-1}x^{2n}$$

On revient ensuite à l'égalité (6) en isolant le premier terme de la première somme et en regroupant les deux sommes :

$$z'(x) - 2xz(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(2n+1)a_{2n+1} - 2a_{2n-1}}_{=0 \text{ (d'après (5))}} x^{2n} = 1$$

Cela prouve que z est solution de (E).

- d.** Comme déjà évoqué, la fonction F est la primitive de f qui s'annule en 0. Pas seulement sur $[0, +\infty[$, comme cela est étudié dans la partie I, mais sur \mathbb{R} tout entier. Ainsi F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et il en est de même de g (par composition et produit). Un simple calcul donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) - 2xg(x) &= 2xe^{x^2}F(x) + e^{x^2}F'(x) - 2xg(x) \\ &= 2xe^{x^2}F(x) + e^{x^2}f(x) - 2xe^{x^2}F(x) \\ &= e^{x^2}e^{-x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cela prouve que g est solution de l'équation différentielle (E). Par ailleurs, il est clair qu'elle s'annule en 0 car $F(0) = 0$.

- e.** Les fonctions g et z sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et vérifient la même équation différentielle (E) – qui est d'ordre 1 – avec la même condition initiale $g(0) = z(0) = 0$. On en déduit que ces deux fonctions sont confondues (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz). La fonction g est donc développable en série entière (puisque z l'est) et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Rédigé à Marseille en mai 2012.

Pierre Béjia

Classe préparatoire TSI-2

Lycée Antonin Artaud (13013)

<http://www.bejia.fr>