

Exercice 1

1. $1 - x > 0 \iff x < 1$. On a donc le domaine de la fonction qui est l'intervalle $D =]-\infty, 1[$.

En 0, on a le DL : $x + \ln(1 - x) = x - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Conclusion: $x + \ln(1 - x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

2. Posons $g(x) = x + \ln(1 - x)$, pour $x < 1$. On a $u_n = g(\frac{1}{n})$. Étudions donc g sur l'intervalle $]0, 1[$: Pour tout $0 < x < 1$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0$. La fonction g est donc décroissante sur $]0, 1[$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est strictement négative sur $]0, 1[$ (faire un tableau de variation).

Conclusion: Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n < 0$ et $u_1 = 1 > 0$

3. Avec le 2. et le 1., on a $u_n = g(\frac{1}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} < 0$. Par théorème de comparaison on peut conclure :

$\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente

4. Étudions f sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout $0 < x < 1$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, 1]$ (faire un tableau de variation).

Conclusion: f est strictement croissante et positive sur $[0, 1]$

5. En 0, on a le DL : $x - \ln(1 + x) = x - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On a $v_n = f(\frac{1}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} > 0$. Par théorème de comparaison on peut conclure :

$\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente

6. Pour $n = 1$: $v_1 - u_1 = 1 - \ln 2 - 1 = -\ln 2$ et pour $n \geq 2$, $v_n - u_n = -\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 - \frac{1}{n})$.

Conclusion: $v_1 - u_1 = -\ln 2$ et pour $n \geq 2$, $v_n - u_n = -\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 - \frac{1}{n})$

On a donc, pour $n \geq 2$:

$v_n - u_n = -\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 - \frac{1}{n}) = -\ln(n+1) + \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n)$ et donc :

$v_n - u_n = -\ln(n+1) + 2\ln(n) - \ln(n-1)$

D'où $S_N = \sum_{n=1}^N (v_n - u_n) = v_1 - u_1 + \sum_{n=2}^N (-\ln(n+1) + 2\ln(n) - \ln(n-1))$ donc

$S_N = -\ln 2 - \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) + 2 \sum_{n=2}^N \ln(n) - \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n))$.

La tranche commune des 3 \sum est $\sum_{n=3}^{N-1} \ln n$ et la somme de ces 3 \sum s'annule $(-1+2+1=0)$. Il reste donc :

$S_N = -\ln 2 - \ln(N) - \ln(N+1) + 2\ln(2) + 2\ln(N) - \ln(1) - \ln(2) = -\ln(N+1) + \ln(N)$.

Conclusion: Pour tout entier $N \geq 3$: $S_N = -\ln(N+1) + \ln(N) = \ln\left(\frac{N}{N+1}\right)$

7. • Avec le 4., $v_n \geq 0$ et donc la suite $\left(\sum_{n=1}^N v_n\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Avec le 2. , $u_n < 0$ pour tout $n \geq 2$ et donc la suite $\left(\sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- Avec le 6. la suite $\left(\sum_{n=1}^N v_n - \sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 1 = 0$.

Conclusion: les suites $\left(\sum_{n=1}^N v_n\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

En conséquence, elles convergent vers la même limite et par définition de la limite d'une somme partielle, on conclut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n .$$

8. On a pour tout $N \geq 2$: $\sum_{n=1}^N v_n < \gamma < \sum_{n=1}^N u_n$ par propriétés des suites adjacentes et car $\forall n \geq 2$: $u_n < 0$ et $v_n > 0$ (et donc les suites des sommes partielles sont strictement monotones).

$v_1 = 1 - \ln 2 = \ln e - \ln 2 > 0$ donc $\sum_{n=1}^2 v_n \geq v_1 > 0$, d'où $\gamma > 0$.

$u_1 = 1$ donc $u_1 + u_2 < 1$ et donc $\gamma < 1$. Conclusion: $0 < \gamma < 1$

9. Utilisons la comparaison série-intégrale. Par décroissance et continuité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur

$[1, +\infty[$, on a : pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$:

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ donc $h_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n)$ d'où $h_n \leq 1 + \ln(n)$.

$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ donc $\ln(n+1) \leq h_n$.

Conclusion: pour tout entier $n \geq 1$: $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$

10. Pour tout entier $n \geq 1$:

$f_{n+1} - f_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)] = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{c}$ avec $c \in]n, n+1[$ par l'égalité des accroissements finis.

On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$: $f_{n+1} - f_n < 0$. Conclusion: (f_n) est décroissante

11. Avec l'encadrement du 9. , pour tout entier $n \geq 1$:

$0 \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq h_n - \ln(n) \leq 1 + \ln(n) - \ln(n) = 1$. En conséquence , (f_n) est minorée par 0 et par le théorème de la limite monotone (f_n) est convergente.

Pour tout entier $N \geq 2$:

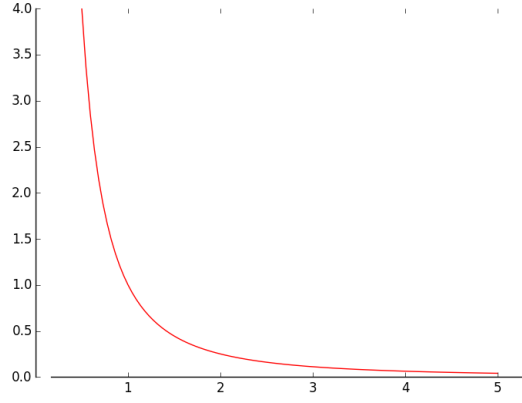
$\sum_{n=1}^N u_n = 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^N \left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = h_N + \sum_{n=2}^N (\ln(n-1) - \ln(n)) = h_N + \ln(1) - \ln(N) = f_N$.

En conséquence, $\lim_{N \rightarrow +\infty} f_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N u_n = \gamma$

Conclusion: (f_n) est convergente vers γ

Remarque : Du coup la convergence par TLM et donc la question 9. ne servent pas.

12. (a) Pour $r = 2$:



(b) $I(a) = \left[\frac{t^{-r+1}}{-r+1} \right]_a^{+\infty} = 0 - \frac{a^{-r+1}}{-r+1}$. Conclusion: $I(a) = \frac{1}{(r-1)a^{r-1}}$

(c) i. On utilise la définition epsilonesque de la convergence pour $\varepsilon = \min(\ell - a, b - \ell) > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N_0$: $\ell - \varepsilon \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq \ell + \varepsilon$.

Or $\ell - \varepsilon \geq \ell - (\ell - a) = a$ et $\ell + \varepsilon \leq \ell + b - \ell = b$.

Posons $N = \max(N_0, 2)$, on conclut : $\forall n \geq N \geq 2 : 0 \leq a < n^r(w_{n+1} - w_n) \leq b$

ii. $\forall n \geq k \geq N \geq 2 : 0 < \frac{a}{k^r} < w_{k+1} - w_k < \frac{b}{k^r}$ que l'on somme de $k = N$ à $k = n$:

$$\sum_{k=N}^n \frac{a}{k^r} \leq \sum_{k=N}^n (w_{k+1} - w_k) \leq \sum_{k=N}^n \frac{b}{k^r}.$$

D'une part on a $\sum_{k=N}^n (w_{k+1} - w_k) = w_{n+1} - w_N$, d'autre part par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x^r}$, on a :

$$\sum_{k=N}^n \frac{1}{k^r} \leq \sum_{k=N}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t^r} dt = \int_{N-1}^n \frac{1}{t^r} dt \text{ et de même } \sum_{k=N}^n \frac{1}{k^r} \geq \sum_{k=N}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r} dt = \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r} dt.$$

Conclusion: $a \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r} dt \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^n \frac{1}{t^r} dt$

iii. On a d'après la question précédente : $-b \int_{N-1}^n \frac{1}{t^r} dt + w_{n+1} \leq w_N \leq -a \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r} dt + w_{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-b \int_{N-1}^n \frac{1}{t^r} dt + w_{n+1} \right) = -b \int_{N-1}^{+\infty} \frac{1}{t^r} dt + 0 = -bI(N-1)$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-a \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r} dt + w_{n+1} \right) = -a \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^r} dt + 0 = -aI(N)$, on conclut :

conclusion: $-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)$

iv. On a donc $-b \frac{1}{(r-1)(N-1)^{r-1}} \leq w_N \leq -a \frac{1}{(r-1)N^{r-1}}$ d'où

$$-b \frac{N^{r-1}}{(r-1)(N-1)^{r-1}} \leq N^{r-1}w_N \leq -a \frac{1}{(r-1)} \text{ ou encore}$$

$$a \leq -(r-1)N^{r-1}w_N \leq b \frac{N^{r-1}}{(N-1)^{r-1}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, en prenant $a = \ell - \frac{\varepsilon}{2}$ et $b = \ell + \frac{\varepsilon}{2}$ et en remarquant que les résultats du ii. et iii. sont encore valables pour tout $n \geq N$ (et pas seulement pour N).

On a donc $\forall n \geq N : \ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq -(r-1)n^{r-1}w_n \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} = \ell + \frac{\varepsilon}{2}$, il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N'$:

$$\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon \text{ et donc}$$

$$\forall n \geq \max(N, N') : \ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq -(r-1)n^{r-1}w_n \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} \leq \ell + \varepsilon.$$

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r-1}w_n = \frac{-\ell}{r-1}$

v. Oui avec, par exemple, les sommations de relations de comparaisons : Si $(n^r(w_{n+1} - w_n))$ tend vers 0 alors lorsque n tend vers l'infini : $w_{n+1} - w_n = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ et comme $\frac{1}{n^r} > 0$, on peut appliquer

les S.R.C. dans le cas convergent : $\sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^r}\right)$ d'où $0 - w_n = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^r}\right)$

et par comparaison série-intégrale classique (à refaire) : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I(n).$

Conclusion: $\boxed{\text{Le résultat est encore vrai si } \ell = 0}$

13. Analyse :

On veut $f_n - \gamma \sim \frac{\alpha}{n}$ soit $n^1(f_n - \gamma) \rightarrow \alpha$. Il suffirait que $n^2(w_{n+1} - w_n)$ converge avec $w_n = \gamma - f_n$ (et non $w_n = f_n - \gamma$ car on a vu au (c) que $w_n < 0$).

Synthèse :

Posons $w_n = \gamma - f_n$, on a :

$$n^2(w_{n+1} - w_n) = n^2(\gamma - f_{n+1} - \gamma + f_n) = n^2\left(-\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n)\right)$$

$$= n^2\left(-\frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(n)\right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2\left[-\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2\left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2} > 0.$$

On applique le 12. avec $r = 2$ et $\ell = \frac{1}{2}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nw_n = \frac{-\frac{1}{2}}{2-1} = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que $n(\gamma - f_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$, donc $\gamma - f_n = \gamma - h_n + \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on peut conclure.

Conclusion: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 2

1. (a) Si $M = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ {}^tv_2 \\ \vdots \\ {}^tv_n \end{pmatrix}$. On en déduit que ${}^tMM = \begin{pmatrix} {}^tv_1v_1 & \dots & {}^tv_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ {}^tv_nv_1 & \dots & {}^tv_nv_n \end{pmatrix}$.

(b) Rappel le produit scalaire dans une base orthonormée s'exprime matriciellement par $\langle x, y \rangle = {}^tXY$.

En conséquence si v_1, \dots, v_n sont deux à deux orthogonaux, ${}^tv_iv_j = \begin{cases} \|v_i\|^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et donc

$${}^tMM = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_n\|^2 \end{pmatrix} \text{ et donc } \det({}^tMM) = \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2.$$

Or $\det({}^tMM) = \det({}^tM) \det(M) = \det(M)^2$, conclusion: $\boxed{|\det M| = \|v_1\| \cdots \|v_n\|}$

2. Si $M = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, alors ${}^tMM = \begin{pmatrix} a_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^2 \end{pmatrix}$ et comme on veut ${}^tMM = I_n$, on en déduit que pour tout i , $a_i = \pm 1$.

Conclusion: Les matrices diagonales et orthogonales sont de la forme : $M = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}$

3. def H(n,C): # C est la liste des colonne de la matrice
 for j in range(n):
 for i in range(n):
 if C[j][i]!=1 and C[j][i]!=-1:
 return 0
 for j in range(n-1):
 for k in range(j+1,n):
 s=0
 for i in range(n):
 s=s+C[j][i]*C[k][i]
 if s!=0:
 return 0
 return 1

Exemples de matrices:

M2=[[1,1],[1,-1]]

M3=[[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]

M4=[[1,-1,1,-1],[1,-1,-1,1],[-1,-1,-1,-1],[1,1,-1,-1]]

In [2]: H(2,M2)

Out[2]: 1

In [3]: H(3,M3)

Out[3]: 0

In [4]: H(4,M4)

Out[4]: 1

4. (a) Soit v un vecteur colonne de M , $v = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ donc $\|v\| = \sqrt{1 + \dots + 1}$.

Conclusion: $\|v\| = \sqrt{n}$

- (b) D'après la question 1.(b), on a : $|\det M| = (\sqrt{n})^n = n^{n/2}$

5. On a $\langle v_1, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n m_{j,i} = \sum_{j=1, m_{j,i}=1}^n m_{j,i} + \sum_{j=1, m_{j,i}=-1}^n m_{j,i} = 0$. Comme les $m_{j,i}$ valent tous ± 1 , on

conclut : Le nombre de $m_{j,i}$ égaux à 1 est égal au nombre de $m_{j,i}$ égaux à -1

6. Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice de \mathcal{H}_n . Considérons la matrice $U = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ avec pour tout j :

$$a_j = \pm 1 \text{ et posons } M_0 = UM = \begin{pmatrix} a_1 m_{1,1} & \cdots & a_1 m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n m_{n,1} & \cdots & a_n m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Montrons que $UM \in \mathcal{H}_n$

- Ses coefficients sont dans $\{-1, 1\}$ ($a_i m_{i,j} = \pm 1 \times \pm 1 = \pm 1$).

- ${}^t(UM)UM = {}^tM({}^tUU)M = {}^tMM$ car d'après le 2. , U est orthogonal.

D'après le 1. , on en déduit que les vecteurs colonnes de UM sont 2 à 2 orthogonaux : si on note v_1, \dots, v_n les colonnes de M et v'_1, \dots, v'_n les colonnes de UM alors pour tout $i \neq j$:

$$\langle v'_i, v'_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

Il suffit pour finir de prendre pour tout i : $a_i = m_{i,1}$ de sorte que la première colonne de $M_0 = UM$

est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion: Il existe une matrice dans \mathcal{H}_n qui a pour première colonne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Si \mathcal{H}_n est non vide avec le 6. , il existe une matrice dans \mathcal{H}_n qui a pour première colonne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et avec le 5. la deuxième colonne a autant de termes égaux à 1 que de termes égaux à -1 .

Conclusion: Si \mathcal{H}_n est non vide alors sa dimension doit être paire

$$8. (a) \det(M_0) = \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2} - 1 & \cdots & m_{1,n} - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_{n,2} - 1 & \cdots & m_{n,n} - 1 \end{vmatrix}$$

en effectuant les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$

Or pour tout i et $j \geq 2 : m_{i,j} - 1 \in \{0, -2\}$

$$\text{On en déduit que } \det(M_0) = \begin{vmatrix} 1 & 2k_{1,2} & \cdots & 2k_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2k_{n,2} & \cdots & 2k_{n,n} \end{vmatrix} \text{ avec } k_{i,j} \in \mathbb{Z}.$$

Par linéarité, on peut factoriser chaque colonne, de 2 à n , par 2 d'où

$$\det(M_0) = 2^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & k_{1,2} & \cdots & k_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k_{n,2} & \cdots & k_{n,n} \end{vmatrix} = 2^{n-1} K \text{ avec } K \in \mathbb{Z} \text{ car le déterminant se calcul unique-}$$

ment à l'aide de produits, sommes et différences de ses coefficients.

Conclusion: $\det(M_0)$ est un entier relatif multiple de 2^{n-1} .

(b) Si \mathcal{H}_n est non vide, avec le 7. , $n = 2p$ est pair.

Avec le 4. (b) et le 8. (a) , on a : $\det(M_0) = n^{n/2} = (2p)^p = 2^{n-1} K$.

On en déduit que $p^p = 2^{p-1} K$ et comme $n > 2$ et pair $n \geq 4$ et donc $p \geq 2$ d'où $p - 1 \geq 1$.

On a donc p^p qui est pair d'où p est pair : $p = 2q$ et $n = 4q$.

Conclusion: n est un entier naturel multiple de 4

Exercice 3

1. (a) Pour tout événement ω , $U_2(\omega) = |\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}|$ et selon que $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$ soient égaux ou non , on a : $U_2(\omega) = 1$ ou $U_2(\omega) = 2$, conclusion: $U_2(\Omega) = \{1, 2\}$

(b) On a : $P(U_2 = 1) = P(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^{\ell} P(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{1}{\ell}\right)^2$ par indépendance de X_1 et

X_2 . Conclusion: $P(U_2 = 1) = \frac{1}{\ell}$

Avec le (a), on en déduit que $P(U_2 = 2) = 1 - \frac{1}{\ell}$

(c) On a $\mathbf{E}(U_2) = 1 \times \frac{1}{\ell} + 2 \times \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) = 2 - \frac{1}{\ell}$ d'où : conclusion: $\mathbf{E}(U_2) = 2 - \frac{1}{\ell}$

```

2. (a) from random import *
def simulU():
    T=[]
    for i in range(10):
        t=randint(1,25)
        if t not in T:
            T.append(t)
    return len(T)

```

```

def simulUbis(): # autre version possible de simulU
    S={randint(1,25) for i in range(10)}
    return len(S)

```

```

(b) def espU(nb_simulation):
    s=0
    for i in range(nb_simulation):
        s=s+simulU()
    return s/nb_simulation

```

Le théorème qui justifie cela est la loi faible des grands nombres. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de **VADR 2 à 2 indépendantes** sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que les **VADR** suivent toutes la loi de U_{10} . Posons $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $m = \mathbf{E}(U_{10})$ et $\sigma = \sigma(U_{10})$. On a, avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0$.

3. On a $U_n(\Omega) = \{1, \dots, \min(n, \ell)\}$

4. On a : $(X_i \in S) = \bigcup_{s \in S} (X_i = s)$ (réunion disjointe), comme $P(X_i = s) = \frac{1}{\ell}$ (loi uniforme) on conclut :

$$P(X_i \in S) = \frac{|S|}{\ell}$$

5. On a : $(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a) = \bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i \neq a)$ et comme les X_i sont indépendantes, on conclut à

l'aide du 4. pour $S = \{1, \dots, \ell\} - \{a\}$: $P(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a) = \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n-1}$

6. Appliquons la formule des probas totales avec le système complet $(X_n = a)_{a \in \{1, \dots, \ell\}}$:

$$\begin{aligned}
 P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{a=1}^{\ell} P\left((X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) / X_n = a\right) P(X_n = a) \\
 &= \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a / X_n = a) = \sum_{a=1}^{\ell} P(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a) P(X_n = a) \text{ car } (X_1, \dots, X_{n-1}) \\
 &\text{et } X_n \text{ sont indépendants.}
 \end{aligned}$$

On a donc $P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{a=1}^{\ell} \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n-1} \times \frac{1}{\ell} = \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n-1} \times \frac{\ell}{\ell}$.

Conclusion: $P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n-1}$

7. On a $(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_{\ell}} (\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \cap (X_n \notin S)$ (réunion disjointe), donc

$$P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_{\ell}} P\left(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S \cap (X_n \notin S)\right).$$

Avec le lemme des coalitions, $(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)$ et $(X_n \notin S)$ sont indépendants, on en déduit que $P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) P((X_n \notin S))$.

On conclut avec le 4. :

$$P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right)$$

8. On partitionne \mathcal{P}_ℓ à cardinal constant :

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S|=k} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - k}{\ell} \right)$$

or $\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S|=k} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) = P(U_{n-1} = k)$. On a donc

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right) = \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k) \left(\frac{\ell - k}{\ell} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k) \left(1 - \frac{k}{\ell} \right) = \sum_{k=1}^{\ell} P(U_{n-1} = k) - \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} k P(U_{n-1} = k) = 1 - \frac{1}{\ell} \mathbf{E}(U_{n-1}).$$

Avec le 7., on a donc $1 - \frac{1}{\ell} \mathbf{E}(U_{n-1}) = P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)$.

Conclusion: $\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - P(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n))$

9. Avec le 6. et le 8., on a directement que $\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ell} \right)^{n-1} \right)$ d'où en décalant :

conclusion: $\mathbf{E}(U_n) = \ell \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ell} \right)^n \right)$

10. La suite géométrique $\left(\left(1 - \frac{1}{\ell} \right)^n \right)$ est de raison q avec $0 < q < 1$, on en déduit immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(U_n) = \ell.$$

Si n est très grand par rapport à ℓ alors pour chaque valeur de $\llbracket 1, \ell \rrbracket$ l'une des X_i prendra cette valeur et donc toutes les valeurs de $\llbracket 1, \ell \rrbracket$ seront atteintes et on aura $U_n = \ell$ presque à chaque tirage.

11. De l'équivalent $1 - (1 - x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$, on en déduit que $\mathbf{E}(U_n) \underset{\ell \rightarrow +\infty}{\sim} \ell \times \frac{n}{\ell}$. On en conclut :

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(U_n) = n$$

Si ℓ est très grand face à n , les X_1, \dots, X_n se placeront sur n valeurs du grand intervalle $\llbracket 1, \ell \rrbracket$ et ces valeurs seront certainement 2 à 2 distinctes.

12. (a) Ici $\ell = 365$ et la i -ème personne est représentée par la variable X_i . Le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes est donc U_n avec $\ell = 365$.

Conclusion: Ce nombre moyen est donc égal à $\mathbf{E}(U_n) = 365 \left(1 - \left(\frac{364}{365} \right)^n \right)$

(b) On a immédiatement avec le 10., $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(U_n) = 365$.