

I Etude d'intégrales généralisées

I.A Divergence de I_α pour $\alpha \leq 2$

Notons que la fonction f_α est toujours continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc localement intégrable, de plus elle est positive, on ne le rappellera plus nécessairement.

I.A.1) Pour $\alpha < 0$, $f_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, il n'y a donc pas de problème de convergence en 0.

Par ailleurs : $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, et donc $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} x$, et enfin : $f_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a donc $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ diverge. On peut par exemple utiliser le critère d'équivalence en $+\infty$, la fonction étant positive.

I.A.2) Désormais, on a $\alpha \geq 0$, et donc le seul problème de convergence est en $+\infty$. On ne rappellera pas toujours.

Pour $\alpha = 0$, $x^\alpha = 1$, et : $f_\alpha(x) = \frac{x}{1 + \sin^2 x} \geq \frac{x}{2}$.

On a donc $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ diverge. On peut par exemple utiliser le critère de comparaison.

I.A.3) On a : $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ et donc : $1 \leq 1 + x^\alpha \sin^2 x \leq 1 + x^\alpha$.

Ce qui donne : $f_\alpha(x) = \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \geq \frac{x}{1 + x^\alpha} \geq 0$ car $x \geq 0$.

Or : $\frac{x}{1 + x^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ diverge pour $\alpha \leq 2$.

Ce qui fait que : $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ diverge par comparaison.

I.B Convergence de I_α

I.B.1) f_α est positive, donc ses primitives sont croissantes, ce qui entraîne $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ converge si et seulement si $\int_0^x f_\alpha(t) dt$ est bornée.

C'est à dire si et seulement si la suite $\int_0^{u_n} f_\alpha(t) dt$ est bornée, (u_n) étant une suite de limite infinie.

D'autre part, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)$ est bornée, puisque c'est une série positive.

Enfin, $\sum_{k=1}^n u_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{(n+\frac{1}{2})\pi} f_\alpha(x) dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} f_\alpha(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x) dx$.

Les deux suites $\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)$ et $\left(\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} f_\alpha(x) dx\right)$ sont donc bornées en même temps, ce qui nous permet de conclure :

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge}$$

I.B.2) Pour $x \in [(n - \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi]$, on a :

$$\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{1 + ((n - \frac{1}{2})\pi)^\alpha \sin^2 x} \leq \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \leq \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{1 + ((n + \frac{1}{2})\pi)^\alpha \sin^2 x}.$$

Ce qui donne bien : $v_n \leq u_n \leq w_n$.

I.B.3) $w_n = (n + \frac{1}{2})\pi \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{1 + ((n-\frac{1}{2})\pi)^\alpha \sin^2 x} dx.$

On pose le changement de variable $u = x - n\pi$ qui donne $du = dx$ et $\sin^2 u = \sin^2 x$, on trouve : $w_n = (n + \frac{1}{2})\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + ((n-\frac{1}{2})\pi)^\alpha \sin^2 u} du.$

Mais la fonction de u est paire, ce qui donne finalement :

$$w_n = 2(n + \frac{1}{2})\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + ((n-\frac{1}{2})\pi)^\alpha \sin^2 u} du.$$

En faisant le même changement de variable et en utilisant la même symétrie, on obtient aussi facilement :

$$v_n = 2(n - \frac{1}{2})\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + ((n+\frac{1}{2})\pi)^\alpha \sin^2 u} du.$$

I.B.4) Dans $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + h^2 \sin^2 x} dx$, on fait le changement de variable $u = \tan x$ par application de la règle de Bioche. D'où : $dx = \frac{1}{1+u^2} du$ et $\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}.$

On obtient une intégrale généralisée, nécessairement convergente car on a effectué un changement de variable monotone de classe C_1 sur une intégrale simple.

Finalement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + h^2 \sin^2 x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (1+h^2)u^2} du = \left[\frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1+h^2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+h^2}}.$$

Ce qui nous donne en remplaçant h par sa valeur :

$$v_n = (2n-1)\pi \frac{\pi}{2\sqrt{1 + ((n+\frac{1}{2})\pi)^\alpha}} \text{ et } w_n = (2n+1)\pi \frac{\pi}{2\sqrt{1 + ((n-\frac{1}{2})\pi)^\alpha}}.$$

I.B.5) $v_n = \frac{\pi^2(n-\frac{1}{2})}{\sqrt{1 + (n+\frac{1}{2})^\alpha \pi^\alpha}}$, et $(n+\frac{1}{2})^\alpha \pi^\alpha \geq 1$, ce qui donne :

$$v_n \geq \frac{\pi^2(n-\frac{1}{2})}{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}(n-\frac{1}{2})}{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}}} (n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

$$v_n \geq \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \times \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} \times \left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \times \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

car $n \geq 1$.

On a donc $K = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ qui convient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha > 0$.

$$w_n = \frac{\pi^2(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{1 + (n-\frac{1}{2})^\alpha \pi^\alpha}} \leq \frac{\pi^2(n+\frac{1}{2})}{(n-\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}(n+\frac{1}{2})}{(n-\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}}} (n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{1}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \text{ pour } n \geq 2.$$

$$w_n \leq \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \times \frac{n+\frac{1}{2}}{n-1} \times \left(\frac{n-1}{n-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \times \frac{5}{2} \times 1 \text{ toujours pour } n \geq 2.$$

On a donc $K' = \frac{5}{2}$ qui convient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha > 0$.

I.B.6) – Pour $\alpha > 4$, $\sum K' \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ converge car $\frac{\alpha}{2} - 1 > 1$,

d'où $\sum w_n$ converge et aussi $\sum u_n$ par comparaison de séries positives.

– Pour $\alpha \leq 4$, $\sum K \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ diverge car $\frac{\alpha}{2} - 1 \leq 1$,

d'où $\sum v_n$ diverge et aussi $\sum u_n$ par comparaison de séries positives.

On obtient : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 4$

et enfin : $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 4$.

I.C Limites de Φ

I.C.1) Comme les intégrales convergent, on a bien : $4 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow f_{\alpha_1}(x) \geq f_{\alpha_2}(x) \Rightarrow \Phi(\alpha_1) \geq \Phi(\alpha_2)$.
 Φ est donc bien décroissante.

I.C.2) On utilise : $v_n \geq K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$,

d'où : $\sum_{k=1}^n v_k \geq K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \geq K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \int_1^{n+1} \frac{1}{(t+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} dt$ par comparaison classique de séries et d'intégrales.

Finalement : $\sum_{k=1}^n v_k \geq K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\frac{\alpha}{2}-2} \left(\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}-2}} - \frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-2}} \right)$.

La série converge et en passant à la limite : $\sum_{k=1}^{\infty} v_k \geq K \frac{(2\pi)^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2}$.

Par ailleurs, $\sum_{k=1}^n v_k \leq \sum_{k=1}^n u_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{(n+\frac{1}{2})\pi} f_\alpha(x) dx$.

Mais, l'intégrale et la série convergent, d'où : $\sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f_\alpha(x) dx = \Phi(\alpha)$.

On obtient enfin : $\Phi(\alpha) \geq K \frac{(2\pi)^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 4^+} +\infty$.

On a donc montré : $\lim_{\alpha \rightarrow 4^+} \Phi(\alpha) = +\infty$.

I.C.3) $w_n \leq K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ pour $n \geq 2$.

D'où $\sum_{k=2}^n w_k \leq K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \leq K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \left(\int_2^n \frac{1}{(t-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} dt + 1 \right)$ par comparaison classique d'une série et d'une intégrale, décalée ici d'un rang.

On intègre : $\sum_{k=2}^n w_k \leq K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\frac{\alpha}{2}-2} \left(2 - \frac{1}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-2}} \right)$.

La série converge, on passe à la limite : $\sum_{k=2}^{\infty} w_k \leq 2K' \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2}$.

Mais : $2K' \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0$, en utilisant les croissances comparées.

Par ailleurs, en sortant le premier rang de la relation du I.C.2, on a :

$$0 \leq \Phi(\alpha) \leq u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} w_k \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_\alpha(x) dx + 2K' \frac{\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\alpha}{2}-2}.$$

Il suffit maintenant de regarder la limite de :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_\alpha(x) dx.$$

$$0 \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{1+x^\alpha \sin^2 x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\frac{3\pi}{2}}{1+(\frac{\pi}{2})^\alpha \sin^2 x} dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3\pi}{2}}{1+(\frac{\pi}{2})^\alpha \sin^2 x} dx \leq 3\pi \frac{\pi}{2\sqrt{1+(\frac{\pi}{2})^\alpha}}.$$

Mais : $3\pi \frac{\pi}{2\sqrt{1+(\frac{\pi}{2})^\alpha}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$.

Cette deuxième limite, associée à la première entraîne : $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Phi(\alpha) = 0$.

II Etude d'une série de fonctions

II.A C'est une série positive à termes non nuls. Le critère de d'Alembert est utilisable.

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)^x}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^x} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \times \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1.$$

La série $\sum \frac{n^x}{n!}$ converge toujours.

II.B La série est positive, donc : $S(x) \geq u_1(x)$ et donc $S(x) \geq 1$.

S est donc à valeurs strictement positives.

Pour $n \geq 2$, $x_1 < x_2 \Rightarrow n^{x_1} < n^{x_2} \Rightarrow S_n(x_1) < S_n(x_2) \Rightarrow S(x_1) \leq S(x_2)$

Mais par ailleurs, toujours pour $n \geq 2$:

$$S_n(x_2) - S_n(x_1) \geq S_2(x_2) - S_2(x_1) = \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2} > 0 \Rightarrow S(x_2) - S(x_1) \geq \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2} > 0.$$

S est donc strictement croissante.

II.C Pour ces calculs on utilisera le développement de e^x en 1, c'est à dire : $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

$$S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1,$$

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} = e,$$

$$S(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2e, \text{ car}$$

les 2 séries convergent,

$$S(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3(2e) - 2e = 5e, \text{ car les 3 séries convergent.}$$

II.D On a déjà montré que $S(x) > 0$.

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^x}{k!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^x}{k!} + \frac{n^x}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^x}{k!} = S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^x}{k!}$$

$$= S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!} \left(1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^x \frac{n!}{k!} \right)$$

mais $x < 0$ et $k > n$, donc : $\left(\frac{k}{n}\right)^x \leq 1$,

$$\text{et aussi : } \frac{n!}{k!} = \frac{1}{\underbrace{(n+1)(n+2) \cdots k}_{(k-n) \text{ facteurs}}} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$$

Notons la notation inhabituelle avec $k > n$.

On a donc maintenant :

$$S(x) \leq S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!} \left(1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} \right) = S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!} \left(1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \right),$$

car on retrouve une série géométrique.

$$\text{Ce qui donne bien : } S(x) \leq S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

II.E On a la double inégalité : $S_{n-1}(x) \leq S(x) \leq S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

$S_{n-1}(x)$ est une valeur approchée à ε près de $S(x)$ dès que : $\frac{n^x}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \varepsilon$.

$S_{n-1}(-1)$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $S(-1)$ dès que : $\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \cdot n!} \leq 10^{-2}$.

Pour $n = 5$, $\frac{6}{5^2 \cdot 5!} = \frac{1}{5^3 \cdot 4} < 10^{-2}$.

Et donc $S_4(-1)$ convient.

II.F Pour $x \geq k$, on a : $u_k(x) \geq 1$, et donc pour $x \geq n$, on a : $\sum_{k=1}^n u_k(x) \geq n$ et enfin : $S(x) \geq n$,

ce qui prouve que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$.

Pour $x < 0$, on a : $S_1(x) \leq S(x) \leq S_1(x) + \frac{2^x}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$.

Or, $\frac{3}{4} 2^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, et $S_1(x) = u_1(x) = 1$.

Ce qui donne : $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = 1$.

II.G La seule chose qui reste à étudier, compte tenu des questions précédentes est la branche infinie en $+\infty$.

Remarquons que : $\frac{S(x)}{x} \geq \frac{u_n(x)}{x}$ pour tous les $n \in \mathbb{N}^*$, en majorant la somme par un seul terme.

On prend maintenant $n = E(x)$, la partie entière de x , et donc : $\frac{S(x)}{x} \geq \frac{u_n(n)}{n+1}$ car la fonction u_n est croissante.

Ce qui donne : $\frac{S(x)}{x} \geq \frac{n^n}{n!(n+1)} = \frac{n^n}{(n+1)!} = a_n$.

Étudions la suite a_n par le théorème de d'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{n^n} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e.$$

Ceci prouve que : $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, et donc que : $\frac{S(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a une branche parabolique de direction Oy .

L'autre branche infinie est une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

On peut tracer le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$S(x)$	1	$\nearrow (e-1) \nearrow$	$+\infty$

II.H Dans les conditions annoncées, $x \in [0, 1]$, et : $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=0}^p \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=p}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Mais, comme $x \in [0, 1]$, on a : $\sum_{k=p}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^p}{p!} \sum_{k=p}^{\infty} \frac{p!}{k!}$, toutes ces séries étant convergentes.

De plus : $\frac{p!}{k!} \leq \frac{1}{(k-p)!}$, en effet, les coefficients binomiaux sont plus grands que 1.

On majore encore : $\sum_{k=p}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^p}{p!} \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{(k-p)!} = \frac{x^p}{p!} e$.

On obtient bien l'encadrement : $\sum_{k=0}^p \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + e \frac{x^p}{p!}$.

II.I La fonction est continue donc localement intégrable sur $]0, 1]$, le problème de convergence est en 0.

Mais $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, la fonction est prolongeable par continuité, c'est un faux problème, l'intégrale converge.

II.J On encadre maintenant $\frac{e^t - 1}{t}$.

$$\frac{\sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} - 1}{t} \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq \frac{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} - 1}{t} + e \frac{t^p}{p!} \text{ pour } p \geq 1.$$

$$\sum_{k=1}^p \frac{t^{k-1}}{k!} \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{k!} + e \frac{t^p}{p!} \text{ pour } p \geq 2.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1 en utilisant : $\int_0^1 \frac{t^{k-1}}{k!} dt = \frac{1}{k \cdot k!}$ et en utilisant également la linéarité de l'intégrale.

On obtient :
$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k \cdot k!} \leq \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k \cdot k!} + \frac{e}{p \cdot p!}.$$

Regardons les limites des différents termes : $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k \cdot k!} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k \cdot k!} = S(-1).$

Et aussi : $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{e}{p \cdot p!} = 0.$

En appliquant le théorème d'encadrement : $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt = S(-1).$