

E3A 2022 MP . 4h

ÉNONCÉ

EXERCICE 1

1. Pour tout réel x , on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ .
 - (b) Démontrer que pour tout réel x de Δ , $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
 - (c) On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
Calculer $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n . On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2) dt$.
 - (a) Justifier l'existence de I_n .
 - (b) En utilisant la question 1. calculer I_n .
3. Pour tout réel x , on pose, lorsque cela est possible, $H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) \exp(-t^2) dt$.
 - (a) Donner le développement en série entière de la fonction \cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.
 - (b) Justifier que H est définie sur \mathbb{R} et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.
On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.
4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question **3.b)** par une autre méthode.
 - (a) Démontrer que H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
 - (b) Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
 - (c) Retrouver l'expression de H obtenue à la question **3.b)**

EXERCICE 2

1. Questions de cours

(a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^m$.

(c) Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[[1, n]]$.

* * * * *

Soient k et n deux éléments de \mathbb{N}^* . On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n .

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n .

3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leq j)$ et prouver que l'on a $\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j)$$

5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

EXERCICE 3

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire (\mid) dont la norme est notée $\|\cdot\|$.

1. Questions de cours

- (a) Soient x et y deux vecteurs de E . Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz: $|(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|$.
On pourra utiliser la fonction $t \mapsto \|x + ty\|^2$.
- (b) Démontrer qu'on a l'égalité $|(x \mid y)| = \|x\|\|y\|$ **si, et seulement si**, les vecteurs x et y sont colinéaires.
- (c) On considère $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique $(X \mid Y) = X^T Y$.

Écrire cette inégalité pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

* * * * *

Pour toute la suite de l'exercice, on identifie \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\| \leq 1\}$.

On considère l'application F de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F(X) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $F(X) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_1 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_3 x_2 = 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$

- 2. Exprimer alors $F(X)$ à l'aide de $S_1(n) = \sum_{i=1}^n x_i$ et de $S_2(n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
- 3. Montrer que F possède un maximum sur B que l'on notera M .
- 4. Montrer en utilisant la question 1. que $M = n - 1$.
- 5. Déterminer tous les $X \in B$ tels que $F(X) = M$.¹

Partie 2

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique orthonormale pour le produit scalaire $(X \mid Y) = X^T Y$ de \mathbb{R}^n .

Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de \mathbb{R}^n décomposés dans la base \mathcal{B} : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

on pose :

¹L'énoncé original demandait de déterminer tous les $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(X) = M$ mais il s'agissait sans doute d'une faute de frappe

$$\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (x_i y_j + x_j y_i)$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X, Y) = x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2$.

6. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ exprimer $F(X)$ à l'aide de φ .
7. Écrire la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ par $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.
8. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A .
9. Vérifier que pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $(\mathbb{R}^n)^2$, on a $\varphi(X, Y) = Y^\top A X = X^\top A Y$.
10. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 .
 - (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice J .
 - (b) En déduire une matrice diagonale Δ semblable à la matrice A .
11. Donner l'expression de $\varphi(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans la base \mathcal{U} .
12. Retrouver alors le résultat établi à la question 4.

EXERCICE 4

Questions préliminaires

Pour tout entier $n \geq 2$, on note : $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ **si, et seulement si** $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Déterminer $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.

3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

4. On considère le polynôme $P = \sum_{k=1}^n kX^{k-1}$.

(a) Montrer que pour tout réel x différent de 1 : $P(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

(b) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(\omega^k) = \frac{n}{\omega^k - 1}$.

(c) En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4 .

On note F et A les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } A = P(F)$$

où P est le polynôme défini à la question 4 .

5. Réduction de la matrice F

(a) Donner, sans démonstration, la matrice F^k pour $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, F^{n-1}$ puis F^n .

On pourra étudier le cas $n = 4$ et/ou l'endomorphisme f canoniquement associé à F pour conjecturer les résultats.

(b) On note G_F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $(F^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Montrer que G_F est de dimension n . En donner une base.

(c) Démontrer que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F .

(d) Justifier que F est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner une matrice diagonale D semblable à F .

6. Réduction de la matrice A

- (a) Expliciter la matrice A .
 - (b) Déterminer une matrice Δ diagonale semblable à la matrice A .
 - (c) Déterminer le degré du polynôme minimal de A .
En déduire que (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. Calculer le déterminant de A . Justifier que la matrice A est inversible.
8. Soit G_A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
Vérifier que $A^{-1} \in G_A$.
9. Montrer que $G_A = G_F$.
10. Vérifier que l'on a l'égalité : $A(F - I_n)^2 = n(F - I_n)$.
11. Déterminer enfin une expression de A^{-1} à l'aide des puissances de la matrice F .

FIN

EXERCICE 1

$$1. \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $f : t \in]0, +\infty[\mapsto t^{x-1} e^{-t} \in \mathbb{R}$.

- f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- En 0. $f(t) \sim t^{x-1}$. Or $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$. Donc par comparaison, f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.
- En $+\infty$. $f(t)e^{t/2} = \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 0 \left(e^{(t/2)} \right)$. Or $t \rightarrow e^{(t/2)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc, par comparaison, f aussi.

Ainsi f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. Comme f est positive, $\int_{]0, +\infty[} f(t) dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

Ainsi Γ est définie sur $\Delta =]0, +\infty[$

(b) Soit $x \in \Delta$ i.e. $x > 0$. Soit $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$. u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et uv possède des limites finies (et nulles) en 0 et en $+\infty$. Donc par théorème d'intégration par parties généralisée, on a $\int_{]0, +\infty[} u v'$ et $\int_{]0, +\infty[} u' v$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_{]0, +\infty[} u v' = [uv]_0^{+\infty} - \int_{]0, +\infty[} u' v.$$

Or dans $\int_{]0, +\infty[} u v'$ on reconnaît $\Gamma(x+1)$ qui est donc une intégrale convergente, et on a alors :

$$\Gamma(x+1) = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

Ainsi $\forall x \in \Delta, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{On a } u_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{2} u_n = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)} u_n.$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)} \right) u_0 = \frac{(2n)!}{4^n n!} u_0 \text{ ce qui est également vrai pour } n = 0.$$

Compte tenu de $u_0 = \sqrt{\pi}$, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$

$$2. I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2) dt.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $g_n : t \in [0, +\infty[\mapsto t^{2n} e^{-t^2}$.

g_n est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et $g_n(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ avec $t \mapsto e^{-t}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc par comparaison, g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n$ est une intégrale convergente

(b) On considère la fonction $\varphi : x \in]0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$ et on considère la restriction de g_n à $]0, +\infty[$ que l'on note encore g_n .

φ est une bijection strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ et g_n est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc par théorème de changement de variables sur une intégrale impropre, on a $\int_{]0, +\infty[} g_n$ et $\int_{]0, +\infty[} \varphi' \times g_n \circ \varphi$ sont de même nature et égales en cas de convergence, ce qui est le cas ici car g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$$\text{Ainsi } I_n = \int_{]0, +\infty[} g_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{x}} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{n! 2^{2n+1}} \sqrt{\pi}}$$

3. $H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) \exp(-t^2) dt.$

(a) Par propriétés de la fonction \cos , on sait que \cos admet un développement en série entière sur \mathbb{R} et

$$\text{que } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$$
 le rayon de convergence étant $R = +\infty$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \in [0, +\infty[\mapsto (-1)^n \frac{x^{2n} t^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$ et S définie sur $[0, +\infty[$ par $S(t) = \cos(xt) e^{-t^2}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$
- D'après le DSE de \cos , la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et sa somme est S qui est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$
- Par comparaison aux intégrales I_n de la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_{]0, +\infty[} |f_n| = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{|x|^{2n}}{n! 2^{2n+1}} \sqrt{\pi}$. On note v_n ce terme $v_n = \frac{|x|^{2n}}{n! 2^{2n+1}} \sqrt{\pi}$
- - Si $x = 0$ $v_n = 0$ pour $n \geq 1$, donc $\sum v_n$ converge.
 - Si $x \neq 0$. Alors $v_n \neq 0$ et on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|x|^2}{4(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum v_n$ converge.

Dans tous les cas, i.e. selon les valeurs de x , la série de terme général $\int_{]0, +\infty[} |f_n|$ est convergente.

Ainsi par le théorème d'intégration terme à terme, S est intégrable sur $[0, +\infty[$ et son intégrale sur $[0, +\infty[$ est la somme de la série des intégrales de f_n :

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \text{ i.e.}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n! 2^{2n+1}} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\boxed{H \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)}$$

4. (a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ par $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, f(x, t) = \cos(xt) e^{-t^2}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (on a $\forall t \in [0, +\infty[, |f(x, t)| \leq e^{-t^2}$ qui est l'expression d'une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$)

- f est partiellement dérivable selon sa première variable en tout point de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \sin(xt)e^{-t^2}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}
- Soit $\varphi : t \in [0, +\infty[\mapsto te^{-t^2}$. φ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (une primitive de φ étant $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ qui a une limite finie en $+\infty$) et on a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$

Ainsi par la règle de Leibniz pour la dérivation des intégrales à paramètres, on a :

$$H \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

(b) On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$.

On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose $u : t \in [0, +\infty[\mapsto \frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v : t \in [0, +\infty[\mapsto \sin(xt)$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et uv possède des limites finies (et nulles) en 0 et en $+\infty$. Donc

par théorème d'intégration par parties généralisée, on a $\int_{[0, +\infty[} u'v$ et $\int_{[0, +\infty[} uv'$ sont de même nature et en cas de convergence et en cas de convergence $\int_{[0, +\infty[} u'v = [uv]_0^{+\infty} - \int_{[0, +\infty[} uv'$.

Or dans $\int_{[0, +\infty[} u'v$ on reconnaît $H'(x)$ qui est donc une intégrale convergente. Ainsi on a :

$$H'(x) = 0 - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

Ceci étant vrai pour tout réel x , on a : $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = -\frac{x}{2}H(x)$

- (c) Les solutions de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2}y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$ où A est une constante. Donc il existe $A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, H(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$.

Or $H(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi on retrouve : $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$

EXERCICE 2

1. Questions de cours

- (a) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Par théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \int_a^b f(t) dt$$

- (b) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : t \in [0, 1] \mapsto t^m$. f est continue sur $[0, 1]$ donc d'après le résultat précédent,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(0 + k \frac{1-0}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \int_0^1 f(t) dt \text{ i.e.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^m = \int_0^1 t^m dt = \frac{1}{m+1}$$

(c) Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$

2. Les valeurs possibles pour X_n sont tous les entiers entre 1 et n : $J = \llbracket 1, n \rrbracket$

3. Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note Y_i la variable aléatoire donnant la valeur de la boule tirée dans l'urne numéro i . Par définition de X_n , on a $X_n = \max_{1 \leq i \leq k} Y_i$.

Soit alors $j \in J = \llbracket 1, n \rrbracket$. L'événement $(X_n \leq j)$ est : $(X_n \leq j) = \bigcap_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (Y_i \leq j)$. Ainsi comme les tirages

sont indépendants et donc les Y_i sont mutuellement indépendants, on a : $\mathbb{P}(X_n \leq j) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(Y_i \leq j)$.

Or $\mathbb{P}(Y_i \leq j) = \frac{j}{n}$ car Y_i suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Donc $\mathbb{P}(X_n \leq j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k$.

Pour $j \geq 2$, on a $(X_n = j) = (X_n \leq j) \setminus (X_n \leq j-1)$, donc :

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_n \leq j) - \mathbb{P}(X_n \leq j-1) = \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$$

On remarque que cette expression est également valable pour $j = 1$

4. On a d'abord $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_n = k)$. D'autre part, comme X_n est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n \in \llbracket j+1, n \rrbracket) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_n = k)$$

Ainsi $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j)$

5. Pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les événements $(X_n > j)$ et $(X_n \leq j)$ forment un système complet d'événements.

Ainsi $\mathbb{P}(X_n > j) = 1 - \mathbb{P}(X_n \leq j) = 1 - \frac{j^k}{n^k}$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j^k}{n^k}\right) = n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k : \mathbb{E}(X_n) = n \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k\right)$$

Or on a vu dans la seconde question de cours que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k = \frac{1}{k+1}$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k\right) = \frac{k}{k+1}$ et donc $\mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}$

6. Si $k = 1$. On reprend la notation Y_i pour la variable aléatoire donnant le résultat du i -ième tirage. On

a dans ce cas $X_n = Y_1$ qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on a alors $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ ce qui est bien cohérent avec l'expression trouvée dans la question précédente avec $k = 1$.

Remarque : on pouvait aussi constater que $\mathbb{E}(X_n) = n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^1 = n - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j = n - \frac{1}{n} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

EXERCICE 3

1. Questions de cours

(a) Soit $(x, y) \in E^2$. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \|x + ty\|^2 = (x + ty | x + ty)$.

On a :

- $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \|y\|^2 t^2 + 2(x|y)t + \|x\|^2$: f est donc une fonction polynomiale réelle de degré inférieur ou égale à 2.
- $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$
- Si $y = 0_E$. Alors on a bien l'inégalité voulue car $|(x|y)| = |(x|0_E)| = 0 \leq \|x\| \|y\| = 0$
- Si $y \neq 0_E$. Alors $\|y\| > 0$ et donc f est une fonction polynomiale réelle de degré 2 et positive sur \mathbb{R} . Ainsi son discriminant Δ est négatif ou nul. Or $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2$, donc $(x|y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ i.e. $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$

Dans tous les cas on a bien établi l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$

- (b)
- Si $y = 0_E$. On a à la fois $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$ et x et y colinéaires.
 - Si $y \neq 0_E$
 - Si $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$. Alors la fonction f vue à la question précédente est polynomiale de degré 2 et possède un discriminant nul. Donc f possède une racine réelle t_0 . On a alors $f(t_0) = 0$ donc $\|x + t_0 y\|^2 = 0$. Ainsi $x + t_0 y = 0_E$: x et y sont donc colinéaires.
 - Si x et y sont colinéaires. Comme y est non nul, on en déduit l'existence d'un réel λ tel que $x = \lambda y$. Mais alors $|(x|y)| = |\lambda| \|y\|^2$ et $\|x\| \|y\| = |\lambda| \|y\|^2 = |(x|y)|$

Ainsi $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires

- (c) Si pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $(X | Y) = X^T Y = \sum_{i=1}^n y_i$, $\|X\|^2 = n$ et $\|Y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$.

Ainsi l'inégalité de Cauchy Schwarz s'écrit alors :

$$\left| \sum_{i=1}^n y_i \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \text{ avec égalité si et seulement si } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

Partie 1

On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\| \leq 1\}$. F de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} définie par : $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, F(X) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j$

2. On a $(S_1(n))^2 = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 + \sum_{j \neq i} x_i x_j \right) + \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j = S_2(n) + F(X)$. Ainsi

$$F(X) = (S_1(n))^2 - S_2(n)$$

3. F est une fonction polynomiale de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} donc F est continue. Or B est un compact de \mathbb{R}^n (c'est la boule fermée unité de \mathbb{R}^n qui est de dimension finie).

Ainsi F possède un maximum sur B . On note M ce maximum.

4. D'après la question 1.c), $\forall X \in \mathbb{R}^n, |S_1(n)| \leq \sqrt{n} \sqrt{S_2(n)}$ i.e. $(S_1(n))^2 \leq n S_2(n) = n \|X\|^2$. Ainsi $\forall X \in \mathbb{R}^n, F(X) \leq (n-1) \|X\|^2$. En particulier $\forall X \in B, F(x) \leq n-1$: $M \leq n-1$

De plus, si $X = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $\|X\| = 1$ et on est dans le cas d'égalité dans l'inégalité de

Cauchy-Schwarz et dans ce cas $S_1(n) = \sqrt{n}\sqrt{S_2(n)}$, donc pour ce $X \in B$, on a $F(X) = (n-1)$: ainsi $M \geq n-1$.

Par double inégalité, on a $M = n-1$

5. Pour $X \in B$, $F(X) = M = (n-1)$ si et seulement si $(S_1(n))^2 = nS_2(n)$ i.e sssi on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or les seuls vecteurs de B colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sont $\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $-\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc **l'ensemble des $X \in B$ tel que $F(X) = M$ est** $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Remarque L'énoncé original demandait de trouver les $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(X) = M$: c'est très certainement une faute de frappe car, par exemple dans le cas très simple où $n = 3$, cela revient à étudier l'hyperboloïde à 2 nappes d'équation $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \dots$

Partie 2

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique orthonormale pour $(X | Y) = X^T Y$ de \mathbb{R}^n . $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

on pose : $\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (x_i y_j + x_j y_i)$

6. $\varphi(X, X) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (x_i x_j + x_j x_i) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} 2x_i x_j$ donc $F(X) = \varphi(X, X)$

7. Pour i_0 et j_0 on note $e_{i_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $e_{j_0} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$ et $y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{si } j \neq j_0 \end{cases}$.

Pour calculer $\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})$ en utilisant l'expression donnée par la somme double, on constate que tous les termes pour $i \notin \{i_0, j_0\}$ sont nuls ainsi que ceux pour $j \notin \{i_0, j_0\}$. Ainsi :

- Si $i_0 \neq j_0$ $\varphi(e_{i_0}, e_{j_0}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_i y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_j y_i \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j \neq i_0} y_j + \sum_{j \neq j_0} x_j \right) = \frac{1}{2} (y_{j_0} + x_{i_0}) = 1$
- Si $i_0 = j_0$ $\varphi(e_{i_0}, e_{j_0}) = F(e_{i_0}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_i x_j = 0$

Ainsi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I_n$ avec J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1

8. A est une matrice symétrique réelle donc d'après le théorème spectral, A est diagonalisable en base orthonormale i.e.

il existe une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de vecteurs propres de A

9. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a $AX = JX - X = \sum_{i=1}^n x_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Donc

$$Y^T AX = \sum_{i=1}^n x_i Y^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - Y^T X = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i y_j = \varphi(X, Y).$$

Or φ est clairement symétrique, donc **pour tout (X, Y) de $(\mathbb{R}^n)^2$, on a $\varphi(X, Y) = Y^T AX = X^T AY$**

10. (a) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$. J est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée.

$J^2 = nJ$ donc $X(X - n)$ annule J donc le spectre de J est inclus dans $\{0, n\}$. Comme de plus J est de rang 1, **0 est valeur propre d'ordre $n - 1$ et n est valeur propre d'ordre 1**

(b) On pose $D = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & n \end{array} \right)$. D'après la question précédente, J est semblable à D . Ainsi, comme

$$A = J - I_n, \quad \text{A est semblable à } \Delta = \left(\begin{array}{c|c} -I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & n-1 \end{array} \right)$$

11. On choisit \mathcal{U} base orthonormale de vecteurs propres de A de telle sorte que les $n - 1$ premiers sont associés à la valeur propre -1 et le dernier à la propre $n - 1$. Soit P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} vers la base \mathcal{U} : P est une matrice orthogonale et on a $\Delta = P^{-1}AP = P^T AP$. Si $x \in \mathbb{R}^n$

de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} et de coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{U} . On a

$X' = P^T X$. De même avec les notations correspondantes $Y' = P^T Y$.

Ainsi $\varphi(X, Y) = Y^T AX = Y'^T \Delta X'$ donc **$\varphi(X, Y) = (n - 1)x'_n y'_n - \left(\sum_{i=1}^{n-1} x'_i y'_i \right)$**

12. On a alors $F(X) = (n - 1)(x'_n)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x'_i)^2 \right)$. Or, comme P est orthogonale, $\|X'\| = \|X\|$, ainsi

si $X \in B$, $\|X'\|^2 = 1$ et donc $\sum_{i=1}^n (x'_i)^2 = 1$ donc $x_n'^2 \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n-1} (x'_i)^2 \geq 0$. Ainsi $F(X) \leq n - 1$ pour tout X avec égalité possible sssi $x'_n = \pm 1$ et $\forall i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, x'_i = 0$. On retrouve bien que

le maximum M de F sur B est $M = n - 1$ et qu'il est atteint en 2 points uniquement

EXERCICE 4

Questions préliminaires

$$n \geq 2 \text{ et } \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$. Ainsi $|z| = 1$ si, et seulement si $\bar{z} = \frac{1}{z}$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. $\overline{\omega^k} = \frac{1}{\omega^k} = \frac{\omega^n}{\omega^k} = \omega^{n-k}$.

Si $k = 0$, on a $\overline{\omega^k} = \omega^0$ et, si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\overline{\omega^k} = \omega^r$ avec $r = n - k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \exists r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$ plus précisément $r = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ n - k & \text{si } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \end{cases}$

3. • Méthode 1. $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ sont les racines du polynôme $X^n - 1$, donc par les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé (et ici unitaire de degré n), on a :

- la somme des racines est l'opposé du coefficient en X^{n-1} donc ici $S_n = 0$
- le produit des racines est $(-1)^n$ fois le coefficient constant donc ici $P_n = (-1)^{n+1}$

• Méthode 2.

- Puisque $\omega \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$ car ω est une racine n -ième de l'unité.

- $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(\frac{2i\pi n(n-1)}{2n}\right)$ donc $P_n = \exp(i\pi(n-1)) = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$

Ainsi $S_n = 0$ et $P_n = (-1)^{n+1}$

4. $P = \sum_{k=1}^n k X^{k-1}$

(a) Soit $Q = \sum_{k=1}^n X^k$. On a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $Q(x) = x \sum_{k=1}^n x^{k-1} = x \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$

Donc en dérivant, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $Q'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$. Or $Q' = P$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, P(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

Remarquons que cette expression est valable pour tout **nombre complexe** différent de 1

(b) Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, ω^k est une racine n -ième de l'unité différente de 1.

Ainsi $P(\omega^k) = \frac{n\omega^{kn+k} - (n+1)\omega^{nk} + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n\omega^k - (n+1) + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n(\omega^k - 1)}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n}{\omega^k - 1}$

Ainsi $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(\omega^k) = \frac{n}{\omega^k - 1}$

(c) $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ sont les racines du polynôme unitaire $X^n - 1$ et elles sont d'ordre 1, donc on a :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k) = (X - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k).$$

Or pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k$. Ainsi $X^n - 1 = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

Comme $\mathbb{C}[X]$ est un anneau intègre et $X - 1$ est non nul, on en déduit : $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

En évaluant en 1, on obtient : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$

* * * * *

$$n \geq 4, F \text{ et } A \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = P(F) \text{ où } P = \sum_{k=1}^n k X^{k-1}$$

5. Réduction de la matrice F

- (a) On pose f l'endomorphisme canoniquement associé à F , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n . On note également θ l'application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers lui-même qui à $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ associe $\overline{j - 1}$ où \bar{r} est l'unique élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ congru à r modulo n . Ici : $\theta(j) = \begin{cases} j - 1 & \text{si } j \geq 2 \\ n & \text{si } j = 1 \end{cases}$
 θ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on a : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) = e_{\theta(j)}$
 Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^k(e_j) = e_{\theta^k(j)}$ avec $\theta^k(j) = \overline{j - k}$. Ainsi :

$$\text{si } k \in \llbracket 2, n - 2 \rrbracket \text{ on a } F^k = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ \hline I_k & 0_{k,n-k} \end{array} \right), F^{n-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{1,n-1} & 1 \\ \hline I_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{array} \right) = F^T \text{ et } F^n = I_n$$

- (b) On pose $G_F = \text{Vect} \left((F^k)_{k \in \mathbb{N}} \right)$ et $G'_F = \text{Vect} \left((F^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \right)$. On a clairement $G'_F \subset G_F$.
 De plus : $\forall k \in \mathbb{N}, F^k = F^{r+nq} = F^r (F^n)^q = F^r$ avec (q, r) les quotient et reste de la division euclidienne de k par n . Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, F^k \in G'_F$ et donc $G_F \subset G'_F$.
 Donc la famille $(F^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est une famille génératrice de G_F . Or c'est une famille libre car dans les matrices F^k , les coefficients non nuls sont à des places toutes différentes : ainsi c'est une base.

Donc G_F est de dimension n , une base étant la famille $(F^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$

- (c) Comme $(F^0, F^1, \dots, F^{n-1})$ est une famille libre, aucun polynôme non nul de degré inférieur ou égale à $n - 1$ n'est annulateur de F . Or $X^n - 1$ est un polynôme unitaire et annulateur de F , donc $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F

- (d) $X^n - 1$ est scindé à racines simples qui annule F donc F est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
 De plus, le spectre de F est l'ensemble des racines de son polynôme minimal donc le spectre de F est $\{\omega^k | k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket\}$. Mais F est une matrice carrée d'ordre n et on a n valeurs propres distinctes : elles sont donc toutes d'ordre 1. Ainsi F est semblable à $D = \text{diag}(\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1})$

6. Réduction de la matrice A

(a) $A = P(F) = \sum_{k=1}^n kF^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)F^k$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ n-1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \ddots & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) F étant semblable à la matrice diagonale D , soit Q une matrice inversible telle que $F = Q^{-1}DQ$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $F^k = Q^{-1}D^kQ$. Ainsi $A = Q^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)D^kQ = Q^{-1}P(D)Q$. Donc si on

note $\Delta = P(D) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)D^k$ on a A semblable à Δ .

Or $\Delta = \text{diag}(P(\omega^0), P(\omega^1), \dots, P(\omega^{n-1})) = \text{diag}\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{\omega^1-1}, \dots, \frac{n}{\omega^{n-1}-1}\right)$.

Ainsi A est semblable à la matrice diagonale $\Delta = \text{diag}\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{\omega^1-1}, \dots, \frac{n}{\omega^{n-1}-1}\right)$

(c) $\chi_A = \chi_\Delta = \left(X - \frac{n(n+1)}{2}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \frac{n}{\omega^k-1}\right)$. Or les $\frac{n}{\omega^k-1}$ sont distincts 2 à 2 et différents de $\frac{n(n+1)}{2}$, donc χ_A est scindé à racines simples : c'est donc aussi le polynôme minimal de A :

le polynôme minimal de A est de degré n .

Ainsi aucun polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ n'annule A , donc :

$(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

7. $\det(A) = \det(\Delta) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega^k-1} = \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} (1-\omega^k)}$.

Or d'après la question 4.c), on a sait que $\prod_{k=1}^{n-1} (1-\omega^k) = n$, donc $\det(A) = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$

Comme $\det(A) \neq 0$, on en déduit que **A est inversible**

8. χ_A est de degré n et $\chi_A(0) \neq 0$ car $\det(A) \neq 0$.

En notant a_0, \dots, a_{n-1} les coefficients de χ_A , $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et on a $a_0 \neq 0$. Or, d'après le

théorème de Cayley-Hamilton, χ_A annule A donc $A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k + a_0 I_n = 0_n$.

Ainsi $A \left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1} \right) = -a_0 I_n$ et donc $A \times \left(-\frac{1}{a_0} A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_0} A^{k-1} \right) = I_n$.

Ainsi $A^{-1} = -\frac{1}{a_0} A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_0} A^{k-1}$ donc **$A^{-1} \in G_A$**

9. On a $A \in G_F$ car A est un polynôme en F . Donc par stabilité de G_F par produit et combinaison linéaire, $G_A \subset G_F$.

Or comme le polynôme minimal de A est de degré n , on montre comme au b) que G_A est de dimension n . Ainsi G_A est un sous-espace vectoriel de G_F de même dimension finie n que G_F , ainsi **$G_F = G_A$**

10. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, (x-1)^2 P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Donc les polynomes $P \times (X-1)^2$ et $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ sont égaux car ils coïncident en une infinité de points.

En évaluant en F , on en déduit $A(F - I_n)^2 = nF^{n+1} - (n+1)F^n + I_n$. Or $F^n = I_n$, donc on a :

$$\boxed{A(F - I_n)^2 = n(F - I_n)}$$

11. On a $A = Q^{-1} \text{diag} \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{\omega^1 - 1}, \dots, \frac{n}{\omega^{n-1} - 1} \right) Q$ donc

$$A^{-1} = Q^{-1} \text{diag} \left(\frac{2}{n(n+1)}, \frac{\omega^1 - 1}{n}, \dots, \frac{\omega^{n-1} - 1}{n} \right) Q.$$

Or $\frac{1}{n} (F - I_n) = Q^{-1} \text{diag} \left(0, \frac{\omega^1 - 1}{n}, \dots, \frac{\omega^{n-1} - 1}{n} \right) Q$ et enfin $\sum_{k=0}^{n-1} F^k = Q^{-1} \text{diag}(n, 0, \dots, 0) Q$.

Donc
$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n} (F - I_n) + \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} F^k}$$

Remarque : je ne vois pas comment résoudre la question 11. à l'aide uniquement de la question 10....