e3a 2015 - PSI 1
durée 4 heures - calculatrices interdites

Exercice 1

1. Si le cavalier va en $b1$, il n'aura, à partir de cette case, que la possibilité de visiter une case déjà vue. Comme il n'aura pas vu toutes les cases, il n'accomplit pas sa mission.
   Si, par l'absurde, il devait accomplir sa mission il devrait donc terminer sur la case $b1$. Or, cette case n'est pas accessible par une case non visitée. On a donc une impossibilité. Le cavalier a mal débuté son parcours et ne peut accomplir sa mission.
2. On constate que l'indice de $[i, j]$ est $8i + j$. La fonction est donc élémentaire.
```
def indice(l):
    return(8*l[0]+l[1])
```
3. Si $n = 8i + j$ avec $j \in [|0, 7|]$ alors cette égalité est une division euclidienne. i et j sont le reste et le quotient.
```
def coord(n):
    return([n//8,n%8])
```
4. La fonction renvoie l'ensemble des indices des cases atteignables (en un coup) depuis une case d'indice donné (dans un ordre fixé : on part du point situé au dessus et à droite et on tourne dans le sens horaire). Ainsi
```
CasA(0)=[17,10]
CasA(39)=[45,54,22,29]
```
5. La case numéro `n` de `ListeCA` contient `CasA(n)`. On peut donc utiliser une définition "en compréhension" pour cette liste.
```
def Init():
    global ListeCA,ListeCoups
    ListeCoups=[]
    ListeCA=[CasA(n) for n in range(64)]
```
6. Comme `CasA[0]=[17,10]`, c'est cette valeur qui est correcte et aucune de celles proposées.
7. (a) On suit à la lettre l'énoncé ?-. Il est à noter que `remove` n'engendrera pas d'erreur car si une case est accessible en un coup à partir d'une autre, la réciproque est aussi vraie. On notera aussi la gestion de la variable locale `test` qui permet de garder en mémoire l'apparition d'une liste vide dans le processus (situation critique).
```
def OccupePosition(n):
    global ListeCA,ListeCoups
    ListeCoups.append(n)
    test=False
    for k in ListeCA[n]:
        ListeCA[k].remove(n)
        if len(ListeCA[k])==0:test=True
    return(test)
```
   (b) Il suffit là encore de suivre l'énoncé.
```
def LiberePosition():
    global ListeCA,ListeCoups
    n=ListeCoups.pop()
    for k in ListeCA[n]:
        ListeCA[k].append(n)
```

(c) Comme indiqué dans l'énoncé, on est attentif à utiliser une copie locale de `ListeCA[n]`. Il faut une vraie copie et on ne peut se contenter de `liste=ListeCA[n]` qui induirait une identité physique entre les listes.

```
def TestePosition(n):
    global ListeCA,ListeCoups
    Test=OccupePosition(n)
    if Test:
        if len(ListeCoups)==64:return(True)
        else:
            LiberePosition()
            return(False)
    else:
        liste=[]
        for k in ListeCA[n]:liste.append(k)
        for k in liste:
            if TestePosition(k):return(True)
        LiberePosition()
        return(False)
```

8. (a) Il suffit de retourner la longueur de `listeCA[n]`.

```
def valuation(n):
    global ListeCA
    return(len(ListeCA[n]))
```

(b) On procède récursivement. Si l'une des listes est vide, c'est facile. Sinon, on repère le plus grand élément (dernier élément de `A` oude `B`), on fusionne les autres et on ajoute l'élément mis à part (en bout de liste puisque c'est le plus grand).

```
def Fusion(A,B):
    if len(A)==0:return(B)
    elif len(B)==0:return(A)
    else:
        a,b=A.pop(),B.pop()
        if valuation(b)>valuation(a):
            A.append(a)
            L=Fusion(A,B)
            L.append(b)
            return(L)
        else:
            B.append(b)
            L=Fusion(A,B)
            L.append(a)
            return(L)
```

(c) On procède récursivement en découpant la liste en deux et en fusionnant la version triée des deux morceaux.

```
def TriFusion(L):
    if len(L)==0:return([])
    elif len(L)==1:return([L[0]])
    else: return(Fusion(TriFusion(L[0:len(L)//2]),TriFusion(L[len(L)//2:])))
```

(d) On ne copie pas `ListeCA[n]` avant de tester les coups jouables après n mais plutôt une version triée de cette liste.

```
def TestePosition(n):
    global ListeCA,ListeCoups
    Test=OccupePosition(n)
    if Test:
        if len(ListeCoups)==64:return(True)
        else:
            LiberePosition()
            return(False)
    else:
        liste=TriFusion(ListeCA[n])
        for k in liste:
            if TestePosition(k):return(True)
        LiberePosition()
        return(False)
```

Exercice 2

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2x\lambda - (y-4)$$

Le discriminant de χ_A vaut $4(x^2+y-4)$. S'il est strictement négatif, A n'a pas de valeur propre réelle et n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable. S'il est nul, A a une unique valeur propre réelle et comme A n'est pas multiple de I_2, elle n'est pas diagonalisable. S'il est > 0, A possède deux valeurs propres réelles distinctes et est diagonalisable avec deux sous-espaces propres qui sont des droites.

$$A \text{ est diagonalisable si et seulement si } x^2+y-4>0$$

2. L'application $u \in E_2 \mapsto u^2$ a une image incluse dans $\mathbb{N}$ et est injective (car $x \mapsto x^2$ l'est sur $\mathbb{R}^+$). E_2 est ainsi en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ (son image). C'est donc une partie finie ou dénombrable. Comme E_2 est infini (E_2 contient tous les entiers), E_2 est finalement dénombrable.

3. L'ensemble des u tels que $f(u) \neq 0$ est l'ensemble dénombrable E_2. f est la loi d'une variable aléatoire si elle est à valeurs positives et si $\sum_{u\in E_2} f(u)$ existe et vaut 1. On a $E_2 = \{\sqrt{n}/\ n \in \mathbb{N}\}$ et la condition précédente s'écrit $\sum(\lambda/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de somme 1. Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, la condition devient $\lambda = \frac{1}{2}$. Pour cette valeur, f vérifie les deux conditions voulues.
Finalement, f est la loi d'une variable alétoire X si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2}$. On a alors $X(\Omega) = E_2$.

4. $X^2(\Omega)$ est l'ensemble des carrés des valeurs prises par X et donc

$$X^2(\Omega) = \mathbb{N}$$

Pour tout réel positif u, $x^2 = u$ équivaut à $x = \sqrt{u}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X^2 = n) = \mathbb{P}(X = \sqrt{n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

5. Comme $\sum(n/2^{n+1})$ est le terme général d'une série absolument convergente et X^2 admet donc une espérance. Elle vaut

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X^2=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$$

On sait d'après le cours sur les séries entières que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Avec $x = 1/2$, il vient

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1$$

6. La fonction génératrice de X^2 est la fonction F telle que

$$\forall x \in [-1,1],\ F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X^2 = n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2} = \frac{1}{2-x}$$

   F est dérivable en1 et X^2 admet donc une espérance qui est égale à

$$F'(1) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1$$

7. La fonction génératrice G de Z est définie par

$$\forall t \in [-1,1],\ G(t) = \mathbb{E}(t^Z) = \mathbb{E}(t^{X^2}t^Y)$$

   Comme X et Y sont indépendantes, t^{X^2} et t^Y le sont. On a donc

$$\forall t \in [-1,1],\ G(t) = F(t)\mathbb{E}(t^Y)$$

   Mais comme X^2 et Y ont même loi, ellesont même fonction génératrice et ainsi

$$\forall t \in [-1,1],\ G(t) = F(t)^2 = \frac{1}{(2-t)^2}$$

   Avec les formules sur les séries entières rappelées plus haut, on obtient que

$$\forall t \in [-1,1],\ G(t) = \frac{1}{4}\frac{1}{(1-t/2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}}t^n$$

   et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z = n) = \frac{n+1}{2^{n+2}}$$

8. La probabilité que A soit diagonalisable est celle de l'événement $(X^2 + Y > 4) = (Z \geq 5)$. Cette probabilité vaut donc (après calcul au brouillon)

$$\mathbb{P}(Z \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(Z = k) = \frac{7}{64}$$

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_x\ :\ t \mapsto \frac{1}{t^x\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. On a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 1 et de $+\infty$.
   Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ et il y a intégrabilité ssi $x > 0$ (fonctions de Riemann).
   Au voisinage de 1^+, $f_x(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ est intégrable.
   f_x étant positive, l'existence de l'intégrable équivaut à l'intégrabilité et donc

$$I = \mathbb{R}^{+*}$$

2. $x \mapsto \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente en $+\infty$ à e^{-x} et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. L'intégrale proposée existe donc. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = [\arctan(e^x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

3. $u \mapsto \mathrm{ch}(u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée ne s'annule pas. Il est donc licite de poser $t = \mathrm{ch}(u)$ dans l'intégrale qui définit $f(1)$. On obtient

$$f(1) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)\sqrt{\mathrm{ch}^2(u)-1}}\, du = \int_0^{\infty} \frac{2du}{e^u+e^{-u}} = \frac{\pi}{2}$$

4. Le même changement de variable donne

$$f(2) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\mathrm{ch}^2(u)} = \left[\frac{\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)}\right]_0^{+\infty} = 1$$

   On a utilisé $\mathrm{ch}(u) \sim e^u/2 \sim \mathrm{sh}(u)$ *au voisinage de* $+\infty$*.*

5. $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive entre deux bornes "dans le bon sens". Ainsi

$$\forall x > 0,\ f(x) \geq 0$$

   Comme la fonction intégrée est continue, positive et non nulle, on peut même dire que

$$\forall x > 0,\ f(x) > 0$$

6. Si $x \leq y$ alors pour tout $t > 1$ on a $f_x(t) \geq f_y(t)$ (avec les notations utilisées en 1). On en déduit en intégrant que $f(x) \geq f(y)$. Ceci montre que f est croissante sur I. Comme ci-dessus, on pourrait même montrer une stricte monotonie.

7. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x \in I,\ t \mapsto f_x(t)$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.
   - $\forall t > 1,\ x \mapsto f_x(t)$ est de classe C^1 sur I de dérivée $x \mapsto -\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.
   - $\forall x \in I,\ t \mapsto -\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.
   - $\forall [a, b] \subset I,\ \forall t > 1,\ \left|-\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\right| \leq \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}$. Le majorant est continu sur $]1, +\infty[$, équivalent au voisinage de 1^+ à $\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{2}}$ et donc prolongeable par continuité en 1 (valeur 0), équivalent à $\frac{\ln(t)}{t^{x+1}}$ au voisinage de $+\infty$ et donc négligeable devant $\frac{1}{t^{1+x/2}}$ (croissances comparées puissance-logarithme). Comme $1 + x/2 > 0$, il y a aussi intégrabilité du majorant au voisinage de $+\infty$ et donc sur $\mathbb{R}$.

   Le théorème s'applique et indique que $f \in C^1(I)$ avec

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\, dt$$

   La fonction intégrée ci-dessus est positive et on a donc $f'(x) \leq 0$ ce qui montre à nouveau la décroissance de f sur I.

8. $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et $t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ en est une primitive.
   $t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{(x+1)}{t^{x+2}}$.
   $t \mapsto \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+1}}$ est de limite nulle en 1 et en $+\infty$.
   On peut donc intégrer par parties pour obtenir

$$\forall x > 0,\ f(x) = (x+1)\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}}\, dt$$

En écrivant que $\sqrt{t^2-1} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ et comme toutes les intégrales existent, on a alors

$$\forall x > 0,\ f(x) = (x+1)\left(f(x) - f(x+2)\right)$$

On en déduit que

$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$

9. Montrons par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f(2p) = \frac{4^{p-1}(p!)^2}{(2p-1)!}$$

- Initialisation : le résultat est vrai pour $p = 1$ car $f(2) = 1$.
- Hérédité : soit $p \geq 2$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang $p-1$. On connaît alors $f(2p-2)$ et la question précédente donne $f(2p)$ en fonction de $f(2(p-1))$. On obtient le résultat au rang p en combinant les résultats.

10. Soit $x > 0$. On a

$$\phi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \phi(x)$$

11. ϕ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme f. On a donc, avec la question précédente,

$$\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim_{x\to 0^+} \phi(x+1) = \phi(1) = f(1)f(2) = f(1)$$

Or, $\phi(x) \sim_{0^+} xf(x)f(1)$ et donc $xf(x) \to 1$ quand $x \to 0^+$ et ainsi

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(n) = \phi(1) = \frac{\pi}{2}$ (périodocité de ϕ). Ceci s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$$

D'après lé décroissance et positivité de f,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n+1)^2 \leq f(n)f(n+1) \leq f(n)^2$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 2,\ \frac{\pi}{2n} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2(n-1)}$$

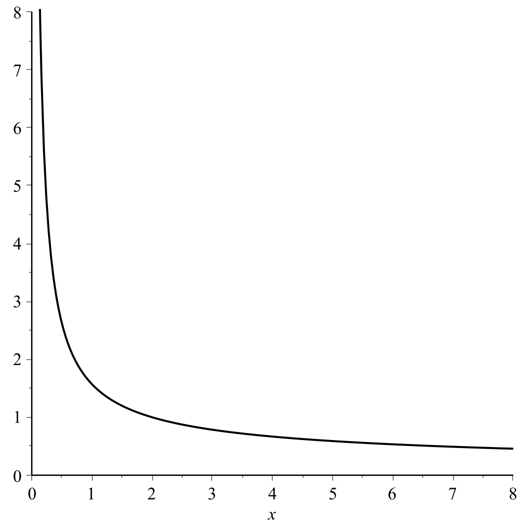
Majorant et minorant étant tous deux équivalent à $\pi/2n$ au voisinage de $+\infty$, il en est de même de $f(n)^2$. Et comme on peut élever un équivalent à une puissance constante, on a finalement

$$f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

13. Toujours par décroissance de f, on a $\forall x \geq 1,\ f(\lceil x \rceil) \leq f(x) \leq f(f(\lfloor x \rfloor))$. Comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ équivalent tout deux à x au voisinage de $+\infty$ (ils différent de x de moins de 1 qui est négligeable devant x) la question précédente donne que le majorant et le minorant sont tous deux équivalents à $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ et donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

14. On a décroissance de f. La courbe aux voisinage de 0 et de $+\infty$ est proche de celle des fonctions équivalentes trouvées.



15. Avec ce qui précède, ϕ tend vers $\pi/2$ quand $x \to +\infty$. Or, pour tout x on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(x) = \phi(x+n)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x > 0,\ \phi(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4

1. (a) α étant réel,

$$|z-\alpha|^2 = (\mathrm{Re}(z)-\alpha)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geq \mathrm{Im}(z)^2$$

ce qui donne le résultat en passant à la racine carrée.

(b) Notons $d = \deg(P)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ les racines de P comptées avec leurs multiplicités (il y en a d puisque l'on suppose P scindé de degré d). On a alors (P étant unitaire)

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| = \left|\prod_{i=1}^{d}(z-\alpha_i)\right| = \prod_{i=1}^{d}|z-\alpha_i|$$

On utilise alors la question précédente avec les α_i et, comme on peut multiplier des inégalités entre réels positifs,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^d$$

(c) On a immédiatement

$$P(X) = (X+1)(X^2-X+1) = (X+1)(X+j)(X+j^2) \quad \text{avec} \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

On a alors immédiatement

$$0 = |P(j)| < |\mathrm{Im}(j)|^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

(d) Si $P(z) = 0$ alors l'hypothèse faite donne $\mathrm{Im}(z) = 0$ et z est donc réel. Comme P est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de Gauss), le fait que toute racine complexe est réelle donne le caractère scindé sur $\mathbb{R}$ de P.

(e) On a donc montré que P (supposé élement de $\mathbb{R}[X]$) est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^{\deg(P)}$.

2. $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On peut donc parler de convergence dans cet espace sans préciser la norme. En particulier, on peut choisir la "norme infinie" (maximum des modules des coefficients) pour voir que la convergence correspond à la convergence coordonnée par coordonnée.

(a) Comme polynôme caractéristique d'une matrice de taille q, P_n est unitaire et de degré q.

(b) On a $P_n(x) = \det(A_n - xI_q)$. Chaque coefficients de $A_n - xI_q$ converge vers le coefficient associé de $A - xI_q$. Comme le passage au déterminant est continu (par exemple par théorèmes d'opération puisque l'on ne fait que des sommes ou produits), on a $P_n(x) \to P(x) = \det(A - xI_q)$ quand $n \to +\infty$.

(c) Chaque A_n étant trigonalisable, chaque P_n est scindé. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}, |P_n(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^q$$

On peut alors passer à la limite pour voir que P vérifie la même propriété et (question 1) est scindé sur $\mathbb{R}$. Ce qui indique alors que A est trigonalisable.

(d) On vient donc de montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ est une partie fermée.

3. (a) La convergence par coordonnée donne

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Chaque A_n est diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1 puisqu'elle possède deux valeurs propres distinctes. En revanche, 1 est la seule valeur propres de A et comme $A \neq I_2$, A n'est pas diagonalisable.
Remarque : les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur da diagonale.

(c) On en conclut que l'ensemble des matrices diagonalisable n'est pas un fermé.