Centrale-Supélec 2019 [1]
PC - Mathématiques 2

Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A Dérivées successives

1. Les fonctions $x \mapsto \sin x + 1$ et $x \mapsto \cos x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et la fonction cosinus ne s'annule pas sur I donc la fonction f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
Soit $x \in I$. On a $f'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x(\sin x+1)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x+1}{\cos x}$, $f''(x) =$

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$ pour tout $x \in I$. Pour $n = 0$, le polynôme $P_0 = X + 1$ convient. Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse de récurrence, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$ pour tout $x \in I$. Donc $f^{(n)}$ est dérivable de dérivée : $f^{(n)'}(x) = \frac{\cos x P_n'(\sin x)(\cos x)^{n+1} + (n+1)(\cos x)^n \sin x P_n(\sin x)}{((\cos x)^{n+1})^2} = \frac{(1-\sin^2 x)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
D'où $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$ en posant $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n \in \mathbb{R}[X]$ ce qui conclut la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ il existe } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n.}$$

$P_0 = X + 1$.
$P_1 = (1 - X^2).1 + (0 + 1)X(X + 1) = X + 1$.
$P_2 = (1 - X^2).1 + (1 + 1)X(X + 1) = X^2 + 2X + 1$.
$P_3 = (1 - X^2).(2X + 2) + (2 + 1)X(2X^2 + 2X + 1) = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$.

$$\boxed{\begin{aligned} P_0 &= X+1 \\ P_1 &= X+1 \\ P_2 &= 2X^2+3X+1 \\ P_3 &= 2X^3+9X^2+6X+4 \end{aligned}}$$

3. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_1 = X + 1$ et le résultat est vrai pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n soit unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{N}$. Il existe alors $Q \in \mathbb{N}_{n-1}[X]$ tel que $P_n = X^n + Q$. Alors, $P_{n+1} = (1-X^2)(nX^{n-1} + Q') + (n+1)X(X^n + Q) = X^{n+1} + (-X^2Q' + Q' + (n+1)XQ) =: X^{n+1} + T$. Il est clair que $T \in \mathbb{Z}[X]$. Montrons que les coefficients de T sont positifs. Il est clair que les coefficients de Q' sont positifs. Le k-ème coefficient de $-X^2Q' + (n+1)XQ$ vaut $-(k-1)a_{k-1} + (n+1)a_{k-1}$ ce qui prouve que $-X^2Q' + (n+1)XQ$ est à coefficients positifs. Donc T est à coefficients positifs. Ceci conclut la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ P_n \text{ est unitaire, de degré } n \text{ et à coefficients entiers.}}$$

4. Soit $x \in I$. On a $2f'(x) = \frac{2(\sin x+1)}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x+1)^2 + \cos^2 x}{\cos^2 x} = f(x)^2 + 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ 2f'(x) = f(x)^2 + 1.}$$

5. D'après la question précédente, $2f'(0) = f(0)^2 + 1$. Or, $f^{(n)}(0) = P_n(0)$ pour tout entier n. Donc $2P_1(0) = P_0(0)^2 + 1$.

1. Vous pouvez envoyez vos remarques ainsi que les irréductibles erreurs et fautes de frappes qui se seront glissées dans ce document à l'adresse suivante pierre-amaury.monard@laposte.net. L'auteur vous en sera reconnaissant.

$$\boxed{2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1.}$$

Soit $n \geqslant$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, nous pouvons dériver n fois l'égalité obtenue à la question précédente en utilisant la formule de Leibniz : $f^{(n+1)}(x) = \sum_0^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(0) + 0$ pour tout $x \in I$. En particulier, pour $x = 0$ et sachant $f^{(i)}(0) = \alpha_i$: $2\alpha_{n+1} = \sum_0^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ 2\alpha_{n+1} = \sum_0^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.}$$

I.B Développement en série entière

6. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi/2]$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ donc $f(x) = \sum_0^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \displaystyle\int_0^x \frac{f^{(N+1)}(t)}{N!}(x-t)^N \,\mathrm{d}t$. D'où $f(x) - \sum_0^N \frac{\alpha_n}{n!} = \displaystyle\int_0^x \frac{P_{N+1}(\sin t)}{N!(\cos t)^{N+1}}(x-t)^N \,\mathrm{d}t$. Or $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \pi/2$ donc $\sin t, \cos t, x - t \geqslant 0$. Enfin, le polynôme P_N étant à coefficients entiers, on a aussi $P_N(\sin t) \geqslant 0$. Ainsi, $f(x) - \sum_0^N \frac{\alpha_n}{n!} x^n \geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive sur le segment $[0, x]$ $(0 \leqslant x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, \pi/2] \text{ et } N \in \mathbb{N},\ \sum_0^N \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).}$$

7. Soit $x \in [0, \pi/2]$. La série $\sum \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée (par $f(x)$) d'après la question précédente donc qui est absolument convergente. Ceci est vrai pour tout $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, donc g est de rayon de convergence au moins $\pi/2$.

$$\boxed{R \geqslant \pi/2.}$$

8. Soit $x \in I$ alors $|x| < R$ et g est dérivable en x de dérivée $g'(x) = \sum_1^{+\infty} \frac{\alpha_n}{(n-1)!} x^{n-1}$.La série $\sum \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ est absolument convergente ; on peut donc effectuer le produit de Cauchy de $g(x)$ avec lui même :

$$\begin{aligned}
g(x)^2 &= \left(\sum_0^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \right)^2 \\
&= \sum_0^{+\infty} \sum_0^n \frac{\alpha_k}{k!} x^k \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} x^{n-k} \\
&= \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_0^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n \\
&= \alpha_0^2 + \sum_1^{+\infty} \frac{2\alpha_{n+1}}{n!} x^n \\
&= \sum_0^{+\infty} \frac{2\alpha_{n+1}}{n!} x^{(n+1)-1} - 1 \\
&= 2g'(x) - 1.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ 2g'(x) = g(x)^2 + 1.}$$

9. Les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$ est bien définie et dérivable sur I comme composées de fonctions dérivables sur I. De plus, $(\arctan f)' = \frac{f'}{1+f^2} = \frac{1}{2}$ d'après la question 4. De même, $(\arctan g)' = \frac{1}{2}$ d'après la question précédente. Donc les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$ ont la même dérivée. Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\arctan f = \arctan g + C$. Or, $f(0) = P_0(0) = \alpha_0 = g(0)$ donc les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$ coïncident en 0 et $C = 0$.
En composant par la fonction tangente, on obtient $\tan(\arctan f(x)) = \tan(\arctan g(x))$ *i.e* $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ f(x) = g(x).}$$

10. Si $R > \pi/2$, alors la fonction g est définie en et continue en $x = \pi/2$. Donc la limite $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x)$ existe. Or, pour $x \in [0, \pi/2)$, $g(x) = f(x)$ d'après la question précédent donc $f(x)$ admet une limite quand x tend vers $(\pi/2)^-$. Mais $\frac{\sin x + 1}{\cos x} \to +\infty$ quand $x \to \pi/2$ ce qui est contradictoire. Donc $R \leqslant \pi/2$.

$$\boxed{R = \pi/2.}$$

I.C Partie paire et impaire du développement en série entière

11. I est un intervalle symétrique en 0 donc la notion de fonctions paires et impaires sur I est bien définie. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Soient $h = p + i = \tilde{p} + \tilde{i}$ deux décompositions en fonctions paires et impaires. Alors la fonction $p - \tilde{p} = \tilde{i} - i$ est à la fois paire et impaire et c'est donc la fonction nulle : $p = \tilde{p}$ et $i = \tilde{i}$. L'unicité est donc assurée.
Définissons les fonctions $p, i : I \to \mathbb{R}$ par $p(x) := \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$. Alors p est paire, i est impaire et $h = p + i$. L'existence est prouvée.

$$\boxed{\text{Pour toute fonction } h : I \to \mathbb{R} \text{ il existe } p \text{ paire et } i \text{ impaire uniques telles que } h = p + i.}$$

12. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x} = \tan x + \frac{1}{\cos x}$. La fonction tangente est impaire et la fonction $1/\cos$ est paire. Posons $p(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ et $i(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+)!} x^{2n+1}$ pour tout $x \in I$. Alors p est paire, i est impaire et $p + i = g$. Or $f = g$ donc par unicité des parties paires et impaires d'une fonction on a $\tan = i$ et $1/\cos = p$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ \tan x = \sum_0^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ et } \frac{1}{\cos x} = \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.}$$

13. D'après la question précédente, t est développable en série entière sur $(-\pi/2, \pi/2)$ donc t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et ses dérivées successives en 0 sont données par les coefficients intervenant dans son développement en série entière : si $t(x) = \sum_0^{+\infty} c_n x^n$ alors $\frac{t^{(n)}(0)}{n!} = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $t^{(2n)}(0) = 0$ et $t^{(2n+1)}(0) = \alpha_{2n+1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ t^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } t^{(2n+1)}(0) = \alpha_{2n+1}.}$$

14. On sait que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

$$\boxed{t' = t^2 + 1.}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dérivons l'égalité obtenue à la question précédente $2n$ fois et évaluons en 0. D'après la formule de Leibniz : $(t')^{(2n)}(0) = \sum_0^{2n} \binom{2n}{k} t^{(k)}(0) t^{(2n-k)}(0) + 0$. Or $t^{(k)}(0) = 0$ si k est pair, d'où $\alpha_{2n+1} = \sum_0^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \alpha_{2k+1} \alpha_{2n-2k-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_{2n+1} = \sum_1^n \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.}$$

II. Équivalent de α_{2n+1}

II.A La fonction zêta

16. Montrons que ζ est une série de fonctions continues qui converge normalement sur tout segment. Posons $u_n : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ par $u_n(s) := \frac{1}{n^s}$. Soit $K = [a,b] \subset (1,+\infty)$ un segment. La fonction u_n est continue sur K. De plus, pour tout $s \in K$, $|u_n| \leqslant \frac{1}{n^a}$. Donc $||u_n||_{\infty,K} \leqslant \frac{1}{n^a}$. Or $a > 1$ (d'où l'intérêt de s'être restreint à un compact !) donc la série $\sum \frac{1}{n^a}$ est convergente donc la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur K. Elle est en particulier uniformément convergente. Donc $\zeta : s \mapsto \sum_0^{+\infty} u_n(s)$ est continue sur K comme limite uniforme de fonctions continues sur K. Ceci est vrai pour tout segment de $(1,+\infty)$ donc ζ est continue sur tout $(1,+\infty)$.

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur } (1,+\infty).}$$

Remarque : Question très intéressante qui illustre bien que la continuité est une propriété locale. Tenter d'appliquer le même théorème sans s'être restreint à un compact d'abord n'aurait pas fonctionné car la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergeante sur $(1,+\infty)$. En effet $||u_n||_\infty = \frac{1}{n}$.

17. Posons $u : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ par $u(t) = \frac{1}{t^s}$. La fonction u est décroissante donc $\frac{1}{n^s} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \geqslant \frac{1}{(n+1)^s}$. En sommant cette inégalité pour $n \geqslant 2$: $\sum_2^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geqslant \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$. En sommant sur $n \geqslant 1$: $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \geqslant \sum_2^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. D'où $\frac{1}{s-1} \geqslant \zeta(s) - 1 \geqslant \frac{1}{2^s(s-1)}$. Comme $\lim\limits_{s+\to+\infty} \frac{1}{s-1} = \lim\limits_{s\to+\infty} \frac{1}{2^s(s-1)} = 0$, on a d'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{s\to+\infty} \zeta(s) - 1 = 0$.

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1.}$$

18. Soit $s > 1$. Séparons la somme $\sum \frac{1}{n^s}$ en deux. On a $\zeta(s) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}$. En remarquant que la première somme est exactement égale à $\frac{1}{2^s}\zeta(s)$ on obtient $\zeta(s)(1 - \frac{1}{2^s}) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } s > 1,\ \zeta(s)C(s) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} \text{ où } C(s) = 1 - \tfrac{1}{2^s}.}$$

II.B Une formule pour la fonction cosinus

19. Soit $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$. Effectuons une intégration par partie. Pour $x \neq 0$, les fonctions $t \mapsto \frac{\sin(2xt)}{2x}$ et $t \mapsto \cos^n t$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc par intégration par partie : $I_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2xt)\cos^n t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2xt)}{2x}\cos^n t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2xt)}{2x} n(\cos^{n-1} t)(-\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{2x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2xt)\cos^{n-1} t \sin tt \,\mathrm{d}t$. Les fonctions $t \mapsto \frac{-\cos(2xt)}{2x}$ et $t \mapsto \cos^{n-1} t \sin tt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc
$I_n(x) = \left(\frac{n}{2x}\right)\left(\left[\frac{-\cos(2xt)}{2x}(\cos^{n-1} t)(\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(2xt)}{2x}((n-1)\cos^{n-2} t \sin^2 t + \cos^n t)\,\mathrm{d}t\right)$. D'où $I_n(x) = (\frac{n}{2x})(0 - \frac{1}{2x}((n-1)(I_{n-2}(x) - I_n(x)) + I_n(x))$. D'où $\frac{4x^2}{n^2} I_n(x) = -\frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) - I_n(x)$. On a bien $(1 - \frac{2x^2}{n^2})I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)$.
Montrons que les fonctions I_n sont continues en 0 ce qui montrera que la formule pour $x = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|I_n(x) - I_n(0)| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^n t|\,|\cos(2xt) - 1|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2xt)^2}{2}\,\mathrm{d}t = C\,|x|^2 \to 0$ quand $x \to 0$ ce qui conclut.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2 \text{ et } x \in \mathbb{R},\ \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x).}$$

Pour $n \geqslant 2$, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \pi/2]$ donc $I_n(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t > 0$. On peut donc diviser l'égalité précédente par $I_n(0) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(0)$: $\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2 \text{ et } x \in \mathbb{R},\ \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.}$$

20. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_1^n (1 - \frac{x^2}{n^2})$. On rappelle que le produit vide vaut 1 par convention.

    Pour $n = 0$. On a : $\pi x \frac{I_0(x)}{I_0(0)} = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(2xt)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1} = \sin(\pi x)$.

    Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse de récurrence, $\sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n-2}(x)}{I_{2n-2}(0)} \prod_1^{n-1}(1 - \frac{x^2}{n^2})$. Or, d'après la question précédente, $\frac{I_{2n-2}(x)}{I_{2n-2}(0)} = \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}(1 - \frac{4x^2}{(2n)^2})$ d'où $\sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_1^n (1 - \frac{x^2}{n^2})$ ce qui conclut la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_1^n \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).}$$

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in (0,1)$. Alors $\sin(\pi x) > 0$ et la formule de trigonométrie $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\cos(\pi x) &= \frac{2\sin(2\pi x)}{2\sin(\pi x)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{2\pi x \frac{I_{4n}(x)}{I_{4n}(0)} \prod_{k=1}^{2n} (1 - \frac{(2x)^2}{k^2}}{\pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{(x^2}{k^2}} \\
&= \frac{I_{4n}(x) I_{2n}(0)}{I_{4n}(0) I_{2n}(x)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

    car les termes pairs des produits se sont simplifiés.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in (0,1),\ \cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(x) I_{2n}(0)}{I_{4n}(0) I_{2n}(x)} \prod_1^n (1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}).}$$

    Remarque : Le facteur $\frac{1}{2}$ de l'énoncé est une erreur.

II.C Un autre développement de tangente

22. utilisons une comparaison série-intégrale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $k \geqslant n+1$, $\int_{2k-3}^{2k-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \geqslant \frac{2}{2k-1}$. Il s'agit de termes positifs, donc on peut toujours calculer la somme quitte à ce qu'elle vaille $+\infty$. En sommant pour $k \geqslant n+1$: $\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \frac{1}{2} \int_{2n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{2} \frac{1}{(s-1)(2n-1)^{s-1}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1 \text{ et } s > 1,\ \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \frac{1}{2(s-1)(2n-1)^{s-1}}.}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \frac{1}{2})$. Posons $u_p(x) := \sum_{n+1} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}$. Alors d'après la majoration obtenue à la question précédente, $0 \leqslant u_p(x) \leqslant \frac{4}{2(2p-1)} (\frac{2x}{2n-1})^{2p-1} = o((\frac{4x^2}{(2n-1)^2})^p)$. Or $\left|\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right| \leqslant 4x^2 < 1$ donc la série $\sum (\frac{4x^2}{(2n-1)^2})^p$ est convergente et donc la série $\sum u_p(x)$ est convergente par comparaison à une série convergente (les deux séries étant positives).

$$\boxed{\text{La fonction } S_n \text{ est bien définie sur } J.}$$

24. En reprenant les majorations effectuées à la question précédente, $|S_n(x)| \leqslant \sum_1^{+\infty} \frac{4}{2(2p-1)}\left(\frac{2x}{(2n-1)}\right)^{2p-1} \leqslant 2\sum_1^{+\infty}\left(\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right)^p$. D'où $|S_n(x)| \leqslant 2.\frac{\frac{4x^2}{(2n-1)^2}}{1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

$$\boxed{S_n \xrightarrow{s} 0 \text{ sur } J.}$$

25. La fonction $f : x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$ est dérivable sur J car $\cos(\pi x) > 0$ sur J. Pour tout $x \in J$, $f'(x) = \frac{-\pi\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} = -\pi\tan(\pi x)$. Par ailleurs, $f(x) = \ln(\frac{I_{2n}(0)}{I_{4n}(0)}) + \ln(I_{4n}(2x)) - \ln(I_{2n}(x)) + \sum_1^n \ln(1-\frac{4x^2}{(2p-1)^2})$ d'après la question 21 car tous les termes apparaissant dans la factorisation de $\cos(\pi x)$ sont strictement positifs. Sous réserve que les fonctions I_k soient dérivables, on obtient une seconde expression pour f' : $f'(x) = 0 + \frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} - \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum\limits_1^n \frac{-\frac{8x}{(2p-1)^2}}{(1-\frac{4x^2}{(2p-1)^2})}$ d'où l'égalité voulue.
Justifions la dérivabilité de I_n. La fonction $h : (0,1/2)\times[0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \cos(2xt)\cos^n t$ est continue par rapport à t, bornée par 1, dérivable par rapport à x de dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{\sin(2xt)}{2x}\cos^n(t)$ d'où $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t$ qui est intégrable sur $[0,\pi 2$. D'après le théorème de dérivation sur le signe intégrale, la fonction $x \mapsto I_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x,t)\,dt$ est dérivable sur $(0,1/2)$. Les calculs menés à la question 19 ont montré que I_n était un $O(x^3)$ au voisinage de 0 donc I_n admet un DL d'ordre 1 en 0 *i.e* I_n est dérivable en 0. Ceci conclut la réponse à cette question.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in J,\ \pi\tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_1^n \frac{8x}{(2k-1)^2}.\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}.}$$

26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$. Posons $A_n(x) := \sum_1^n \frac{8x}{(2k-1)^2}.\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}$. Alors

$$\begin{aligned}
A_n(x) + S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{2^3x}{(2k-1)^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)^p + S_n(x)\\
&= \sum_{k=1}^n\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p+3}x^{2p+1}}{(2k-1)^{2p}} + S_n(x)\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2p-1)^{2p}}\right) + S_n(x)\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2p-1)^{2p}}\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} 2^{2p+1}x^{2p-1}C(2p)\zeta(2p)
\end{aligned}$$

d'après la question 18,

$$= \sum_1^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in J, \pi\tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_1^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.}$$

27. La fonction $g : t \mapsto \sin t - t\cos t$ est dérivable sur J de dérivée $g'(t) = t\sin t \geqslant 0$ sur J donc g est croissante sur J et $g(t) \geqslant g(0) = 0$ pour tout $t \in J$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in J,\ t\cos t \leqslant \sin t.}$$

28. Nous avons montré à la question 26 que I_n était dérivable de dérivée $I_n'(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2t\sin t(2tu)\cos^n t\,\mathrm{d}t$. Soit $x \in [0,1]$. Alors $I_n'(x)$ est négatif et d'après la question précédente, $-I_n'(x) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(2xt)\cos^{n-1} t\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x\cos(2xt)\frac{\cos^n t}{n}\,\mathrm{d}t = \frac{4x}{n} I_n(x)$ par IPP.

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in J,\ 0 \leqslant -I_n'(x) \leqslant \tfrac{4x}{n} I_n(x).}$$

On en déduit $\frac{I_n'(x)}{I_n(x)} = O(\frac{1}{n})$ en $+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n'(x)}{I_n(x)} = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n'(x)}{I_n(x)} = 0.}$$

29. Soit $x \in J$. Alors $x, 2x \in [0,1]$. On a que $S_n(x)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ par la question 24 et $-\frac{2I_{4n}'(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I_{2n}'(x)}{I_{2n}(x)}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ par la question précédente donc par passage à la limite quand dans l'égalité de la question 25 : $\pi\tan(\pi_x) = \sum_1^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}$. Vrai pour tout $x \in J$,

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in J,\ \pi\tan(\pi x) = \sum_1^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}.}$$

II.D Un équivalent de α_{2n+1}

30. D'après la question 12, pour tout $x \in J$, $\pi\tan(\pi x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}\pi^{2n+2}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a $\frac{\alpha_{2n+1}\pi^{2n+2}}{(2n+1)!} = 2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)$ pour tout $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\zeta(2n+2).}$$

31. Sachant $\zeta(s) \to 1$ en $+\infty$ et en utilisant la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n+1} &\sim \frac{2.2^{2n+2}}{\pi^{2n+2}}\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{\mathrm{e}}\right)^{2n+1} \\
&\sim \sqrt{\pi n}\frac{2^{4n+5}n^{2n+1}}{\pi^{2n+2}\mathrm{e}^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} \\
&\sim 2\sqrt{\pi/n}\left(\frac{4n}{\pi\mathrm{e}}\right)^{2n+2}
\end{aligned}$$

car $(1+\frac{1}{2n})^{2n+1} \to 1$ en $+\infty$.

$$\boxed{\alpha_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sim 2\sqrt{\pi/n}\left(\frac{4n}{\pi\mathrm{e}}\right)^{2n+2}.}$$

III Permutations alternantes

III.A Dénombrement des permutations aléatoires

On note **PAM** et **PAD** les permutations aléatoires montantes et les permutations aléatoires descendantes

32. Pour $n = 2$, il n'y a qu'une **PAM** : (12).
    Pour $n = 3$, il y a deux : (132) et (231).
    Pour $n = 4$ il y en a cinq : (1324), (1423), (2314), (2413), (3412).
33. Soit $n \geqslant 2$. Soit $S^n = \{(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$, posons $\tau x := (n + 1 - x_1, \ldots, n + 1 - x_n)$. Alors les entier $n + 1 - x_k$ sont compris entre 1 et n et sont distincts donc $\tau : S^n \to S^n$ est bien défini. De plus, τ est une involution de S qui envoie les **PAM** sur les **PAD** . Puisque qu'une involution est bijective et en particulier injective, il y a moins de **PAM** que de **PAD** . Mais il y a aussi moins de **PAD** que de **PAM** .

    $$\boxed{\text{Il y a autant de permutations aléatoires montantes que de descendantes.}}$$

34. Puisque A est une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal k, il existe $\alpha : [\![1, k]\!] \to A$ une bijection **croissante**. Soit S^A l'ensemble des k-uplets d'éléments de A qui sont alternantes montantes. On définit $f : S^k \to S^A$ par $f((i_1, \ldots, i_k)) = (\alpha(i_1), \ldots, \alpha(i_k))$. Puisque α est strictement croissante, $\alpha(i_{s+1}) - \alpha(i_s)$ est du même signe que $i_{s+1} - i_s$. Ainsi, f est bien définie. On montre que f est bijective en exhibant son inverse : $f^{-1} : S^A \to S^k$ qui est donné par $f^{-1}((x_1, \ldots, x_k)) = (\alpha^{-1}(x_1), \ldots, \alpha^{-1}(x_k))$. La fonction f^{-1} est bien définie car $\alpha^{-1} : A \to [\![1, k]\!]$ est une bijection strictement croissante.

    $$\boxed{\#\text{ listes alternantes montantes de } A = \beta_k}$$

35. Dénombrons le nombre de permutations alternants (montantes ou descendantes) de $[\![1, n+1]\!]$. On sait qu'il y en a #**PAM** +#**PAD** $= 2\beta_{n+1}$. Effectuons une disjonction de cas sur la place de $n+1$ dans la liste. Avant l'entier $n+1$ il y a un nombre $k \in [\![0, n]\!]$ d'entiers. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une partie A à k éléments dans $\{1, \ldots, n\}$. Une fois les entiers qui sont situés avant $n+1$ déterminés, les entiers situés après sont entièrement déterminés. On pose $B = [\![1, n]\!] \backslash A$. Alors pour construire une liste alternante de $[\![1, n+1]\!]$ avec $n+1$ à la $k+1$-ème position il faut et il suffit de construire une liste alternante de A et une liste alternante de B qui respectent la condition suivante : la liste de A est descendante ssi k est pair et la liste de B est descendante ssi $n - k$ est pair. En effet, puisque $n + 1$ est le maximum de $[\![1, n+1]\!]$, l'entier a venant juste avant $n+1$ doit être plus petit. Mais alors l'entier b venant avant a doit être plus grand pour que la liste soit alternante. De même après $n+1$. Ainsi, la parité de k et de $n - k$ impose le sens dans lequel part les listes de A et B. Il y a β_k listes de A et β_{n-k} listes de B qui conviennent. D'où la formule $2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}$.

    $$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ 2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}.}$$

36. On a $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ et les suites (α_n) et (β_n) vérifie la même relation de récurrence (déterminées aux questions 5 et 35) à partir du rang 1, donc elles sont égales (par récurrence immédiate).

    $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \beta_n.}$$

III.B Permutations aléatoires

37. Puisque la loi avec laquelle on tire une permutation de $\mathfrak{S}_n$ est la loi uniforme, la probabilité p_n de tirer une **PAM** vérifie : $p_n = \frac{\#\mathbf{PAM}}{\#\Omega_n} = \frac{\beta_n}{n!}$. À la question 8, nous avons déterminé que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ était plus grand que $\pi/2$. En particulier, la série $\sum \frac{\alpha_n}{n} 1^n$ est absolument convergente et $p_n = \frac{\alpha_n}{n!}$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0.}$$

D'après la question 30, $\alpha_{2n+1} \sim \frac{2.2^{2n+2}}{\pi^{2n+2}}(2n+1)!$ d'où

$$\boxed{p_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+2}.}$$

38. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Pour tout permutation $\sigma \in \Omega_n$ on note $X_i(\sigma) = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\}$. Nous allons voir que X_i est une variable aléatoire sur les parties à i éléments de $\{1, \ldots, k\}$ de loi uniforme. Soit A une partie à i éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Alors $\mathbb{P}(X_i = A) = \frac{\textit{cas favorables}}{\textit{cas possibles}} = \frac{i!(n-i)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{i}}$. L'évènement $\{M_n > i\} \cap \{X_i = A\}$ signifie que les i premiers éléments de la liste $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ forme une **PAM** de A. Il y en a $\beta_i(n-i)!$. Donc $\mathbb{P}(M_n > i, X_i = A) = \frac{\beta_i(n-i)!}{n!}$. Cette probabilité ne dépend pas de A donc lorsqu'on somme sur l'ensemble des valeurs que peut prendre X_i : $\mathbb{P}(M_n > i) = \sum_{|A|=i} \mathbb{P}(M_n > i, X_i = A) = \binom{n}{i}\frac{\beta_i(n-i)!}{n!} = p_i$.

$$\boxed{\text{Pour tout } i = 0, \ldots, n,\ \mathbb{P}(M_n > i) = p_i.}$$

39. Pour une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ donc $\mathbb{E}[M_n] = \sum_0^n \mathbb{P}(M_n > i) = \sum_0^n p_i$.

$$\boxed{\mathbb{E}[M_n] = p_0 + \cdots + p_n.}$$

On a $\mathbb{E}[M_n] = \sum_0^n \frac{\beta_k}{k!} = \sum_0^n \frac{\alpha_k}{k!} 1^k \to g(1) = f(1) = \frac{\sin 1 + 1}{\cos 1}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[M_n] = \frac{\sin(1)+1}{\cos(1)}.}$$

$* * *$ FIN $* * *$
