

Corrigé Centrale MP Maths 2

I.A

I.A.1) Cours, $\Rightarrow$ en prenant un vecteur propre, $\Leftarrow$ en utilisant le théorème spectral.

I.A.2) Cours, on reprend la démonstration précédente.

I.B

I.B.1) Soit $X_i \in \mathfrak{M}_{i,1}(\mathbb{R})$ non nul. Posons $X = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $X \neq 0$.

Il vient ${}^t X_i A^{(i)} X_i = {}^t X A X > 0$ donc $A^{(i)}$ est définie positive. $\det(A^{(i)})$ est le produit des valeurs propres de la matrice $A^{(i)}$ (la matrice symétrique réelle $A^{(i)}$ est diagonalisable par le théorème spectral), comme celles-ci sont toutes > 0 , on a bien $\det(A^{(i)}) > 0$.

I.B.2) $n = 1$. $A = (a)$ définie positive $\Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow \det A = a > 0$.

Traitons le cas $n = 2$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ avec $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$.

En notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres, on a $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ donc les deux valeurs propres sont de même signe.

Par le théorème spectral, ${}^t X A X = \lambda_1 x'_1{}^2 + \lambda_2 x'_2{}^2$ avec (x'_1, x'_2) coordonnées de X dans une base orthonormale de diagonalisation.

Donc pour X non nul, $\operatorname{sgn}({}^t X A X) = \operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}({}^t E_1 A E_1) = \operatorname{sgn} a$ avec $E_1 = {}^t(1, 0)$

Donc les deux valeurs propres de A sont strictement positives, A est bien définie positive.

I.B.3) a) On sait que $\det A$ est le produit des valeurs propres et que $\det A > 0$ donc si A n'est pas définie positive alors il existe un nombre pair ≥ 2 de valeurs propres strictement négatives. A étant diagonalisable, on en déduit l'existence de deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à deux de ces valeurs propres.

b) On peut choisir ces deux vecteurs propres orthogonaux (c'est en particulier automatique si les valeurs propres sont distinctes) et de dernière composante égale à 1.

En effet, la dernière composante d'un vecteur Y du **a)** ne peut être nulle, sinon on aurait

$${}^t \tilde{Y} A^{(n)} \tilde{Y} = {}^t Y A Y < 0$$

avec $Y = \begin{pmatrix} \tilde{Y} \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui contredit le fait que $A^{(n)}$ soit définie positive et donc on peut alors multiplier les vecteurs par un coefficient non nul adapté.

On dispose alors de X_1 et X_2 vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, orthogonaux, de dernière composante égale à 1.

Soit $X = X_1 - X_2$. La dernière composante de X est nulle et

$${}^t X A X = \lambda_1 \|X_1\|^2 + \lambda_2 \|X_2\|^2 < 0.$$

c) Il vient ${}^t \tilde{X} A^{(n)} \tilde{X} = {}^t X A X < 0$, en notant $\tilde{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne X où l'on a supprimé le dernier coefficient.

Ceci contredit la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ d'où l'absurdité.

I.C

$\Leftarrow$ est fausse avec le contre-exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En revanche, le sens direct est vrai (non demandé dans l'énoncé).

On le montre en considérant les matrices définies positives $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n$ pour $\varepsilon > 0$ puis en faisant tendre ε vers 0.

I.D

En Maple :

```
with(LinearAlgebra):
defpos:=proc(A,n)
  local i;
  i:=1;
  while i<=n and Determinant(SubMatrix(A,[1..i],[1..i]))>0
  do i:=i+1 od;
  evalb(i=n+1) end;
```

```
A:=Matrix(3,3,[[1,1,1],[1,10,0],[1,0,4]]):
```

```
defpos(A,3);
```

true

```
A:=Matrix(2,2,[[1,0],[0,-2]]):
```

```
defpos(A,2);
```

false

II.A

Aucune difficulté.

II.B

P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(n)}$ est de degré n .

En utilisant la formule de Leibniz, on calcule

$$P_n^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^n)_{|X=1}^{(k)} ((X-1)^n)_{|X=1}^{(n-k)} = \binom{n}{n} (X^n)_{|X=1}^{(n)} = n!.$$

II.C

Notons que $L_n(1) = 1$.

Par intégrations par parties successives, le terme entre crochet ayant toujours 0 et 1 comme racines, on obtient facilement,

$$\begin{aligned} \langle Q, P_n^{(n)} \rangle &= - \langle Q', P_n^{(n-1)} \rangle = \dots = (-1)^n \langle Q^{(n)}, P_n \rangle \\ &= (-1)^n \langle 0, P_n \rangle = 0 \text{ car } \deg Q < n. \end{aligned}$$

II.D

II.D.1) En posant $J_{p,q} = \int_0^1 X^p (X-1)^q dX$. On a par intégration par parties pour $q \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$J_{p,q} = -\frac{q}{p+1} J_{p+1,q-1}$$

II.D.2) Calculons,

$$\begin{aligned}
\langle L_n, L_n \rangle &= \frac{1}{(n!)^2} \langle P_n^{(n)}, P_n^{(n)} \rangle \\
&= \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \langle P_n, P_n^{(2n)} \rangle \quad (\text{comme en II.C}) \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \langle P_n, 1 \rangle \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} I_n = \frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}$$

II.E

$K_n = \sqrt{2n+1} L_n$ convient clairement.

On peut justifier l'unicité en expliquant que K_n doit être un vecteur directeur unitaire de la droite supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Il n'existe que deux tels vecteurs, l'hypothèse du coefficient dominant strictement positif (K_n est de degré n de manière évidente) assure alors l'unicité de K_n .

II.F

On trouve $K_0 = 1$, $K_1 = \sqrt{3}(2X - 1)$, $K_2 = \sqrt{5}(1 + 6X^2 - 6X)$.

III A

III.A.1) $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\det H_2 = \frac{1}{12} \neq 0$, donc H_2 est inversible et $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$.

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \det H_3 = \frac{1}{2160} = \frac{1}{12 \times 180} \neq 0,$$

$$\text{donc } H_3 \text{ est inversible et } H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

III.A.2) En soustrayant la dernière colonne à toutes les autres, le terme (i, j) devient $\frac{n-j+1}{(i+j-1)(i+n)}$ pour $j \leq n$. On factorise alors $\frac{1}{i+n}$ sur chaque ligne i allant de 1 à $n+1$, puis $n-j+1$ sur chaque colonne j variant de 1 à n , ce qui donne $\Delta_{n+1} = \frac{n!}{(n+1) \cdots (2n+1)} \det M$, où $M = (M_{i,j})$ avec

$M_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$ pour $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq n+1$ et la dernière colonne de M est remplie de 1.

On soustrait alors la dernière ligne de M à toutes les autres. Pour $j \leq n$ et $i \leq n$, le terme (i, j) devient encore $\frac{n-j+1}{(i+j-1)(i+n)}$. La colonne $n+1$ est nulle sauf le terme d'indice $(n+1, n+1)$ égal à 1. On factorise les mêmes termes qu'au-dessus mais cette fois pour les lignes d'indice i allant de 1 à n et les colonnes d'indice j allant de 1 à n . Par développement selon la dernière colonne, il vient

$$\Delta_{n+1} = \frac{n!}{(n+1) \cdots (2n+1)} \frac{n!}{(n+1) \cdots (2n)} \Delta_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \Delta_n.$$

III.A.3) Comme $\Delta_1 = 1$, on obtient en multipliant les relations précédentes

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (i!)^4}{\prod_{i=1}^{n-1} (2i)! \prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)!} = \frac{c_n^4}{2^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} i!} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

III.A.4) D'après le calcul précédent, $\det H_n \neq 0$ donc H_n est inversible. En isolant un terme $(2i+1)$

dans le produit, $\det H_n^{-1} = \frac{1}{\det H_n} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \right)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (2i+1) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \binom{2i}{i} \right)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)$: il s'agit bien d'un entier naturel.

III.A.5) Comme H_n est réelle symétrique de taille $n \times n$, elle admet une base orthonormée de vecteurs propres avec n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité). On observe que $\Delta_i = \det H_n^{(i)}$ pour i allant de 1 à n . D'après A.3, ce déterminant est toujours strictement positif, donc par la partie I, H_n est définie positive, donc (d'après I.A.2) les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

III B

III.B.1) On pose $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace de dimension finie $(n+1)$ de E , on a $E = \mathbb{R}_n[X] \oplus \mathbb{R}_n[X]^\perp$, donc si on décompose f en $\Pi_n + h$ dans cette somme directe, alors pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|Q - f\|^2 = \|Q - \Pi_n\|^2 + \|h\|^2 \geq \|Q - \Pi_n\|^2$ avec égalité si et seulement si $Q = \Pi_n$, donc Π_n est l'unique élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|\Pi_n - f\| = \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|$.

III.B.2) Comme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$, a fortiori $\Pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc $\|\Pi_{n+1} - f\| = \min_{Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]} \|Q - f\| \leq \|\Pi_n - f\|$, donc la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Par théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0; 1]$, et comme $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\infty$, cette suite converge aussi vers f pour la norme $\|\cdot\|$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\| \leq \varepsilon$.

En notant $n_0 = \deg P$, on en déduit $\|\Pi_{n_0} - f\| \leq \varepsilon$, donc compte tenu de la décroissance de la suite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Pi_n - f\| = 0$.

III.B.3) Pour i et j entre 1 et n , $\langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1}$. Dans la base canonique $(X^{i-1})_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, la matrice du produit scalaire étudié restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est bien égale à H_n .

III.B.4) Le polynôme Π_n s'écrivant $\sum_{j=0}^n a_j X^j$ est caractérisé par le fait que $\Pi_n - f \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$, c'est-à-dire $\langle \Pi_n - f, X^i \rangle = 0$ pour i variant de 0 à n , autrement dit $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{i+j-1} = \langle f, X^{i-1} \rangle$ pour i variant de 1 à $n+1$. En notant V le vecteur ${}^t(a_0, \dots, a_n)$, on obtient $H_{n+1}V = {}^t(\langle f, 1 \rangle, \dots, \langle f, X^n \rangle)$, d'où $V = H_{n+1}^{-1} {}^t(\langle f, X^i \rangle)_{0 \leq i \leq n}$.

III.B.5) On pose $\Pi_2 = aX^2 + bX + c$ et on applique la question précédente.

$$\langle f, 1 \rangle = \frac{\pi}{4}, \quad \langle f, X \rangle = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{\ln 2}{2}, \quad \langle f, X^2 \rangle = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

${}^t(c, b, a) = H_3^{-1} {}^t(\langle f, 1 \rangle, \langle f, X \rangle, \langle f, X^2 \rangle)$. Avec le calcul fait au III.A, on obtient :

$$c = 30 - 21\frac{\pi}{4} - 18 \ln 2, \quad b = -180 + 36\pi + 96 \ln 2, \quad a = 180 - 75\frac{\pi}{2} - 90 \ln 2.$$

IV A

IV.A.1) $s_1 = 1$, $s_2 = 4 - 6 - 6 + 12 = 4$, $s_3 = 9$. On peut conjecturer que $s_n = n^2$.

IV.A.2) a) Le système s'écrit $H_n {}^t(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{n-1}^{(n)}) = {}^t(1, 1, \dots, 1)$. Il admet une solution unique car H_n est inversible.

b) La solution s'écrit ${}^t(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{n-1}^{(n)}) = H_n^{-1} {}^t(1, 1, \dots, 1)$; autrement dit, pour p allant de 0 à $n-1$, $a_p^{(n)}$ est la somme des éléments de la ligne $p+1$ de H_n^{-1} , donc en sommant ces valeurs,

$$\text{on obtient que } \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = s_n.$$

IV.A.3) $\langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \langle S_n, X^p \rangle$, or $\langle S_n, X^p \rangle = \frac{a_0^{(n)}}{p+1} + \frac{a_1^{(n)}}{p+2} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(n)}}{p+n} = 1$ d'après le système

$$\text{du a), donc } \langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p.$$

IV.A.4) En prenant $Q = S_n$ dans la formule précédente, on obtient d'après 2.b) que $s_n = \langle S_n, S_n \rangle$.

Comme $(K_0, \dots, K_{n-1})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a également $\langle S_n, S_n \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \langle S_n, K_p \rangle^2$.

D'autre part, la formule précédente s'écrit aussi $\langle S_n, Q \rangle = Q(1)$, d'où $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} K_p(1)^2$.

IV.A.5) Comme $K_p = \sqrt{2p+1} L_p$ et $L_p(1) = 1$, il vient $K_p(1) = \sqrt{2p+1}$.

IV.A.6) Les deux questions précédentes fournissent $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = n(n-1) + n = n^2$.

IV B

IV.B.1) Par triangle de Pascal, $\binom{2p}{p} = \binom{2p-1}{p} + \binom{2p-1}{p-1} = 2\binom{2p-1}{p}$ donc est un entier pair.

$$\binom{n+p}{p} \binom{n}{p} = \frac{(n+p)!}{n!p!} \frac{n!}{p!p!} = \frac{(n+p)!}{(n-p)!(2p)!} \frac{(2p)!}{p!p!} = \binom{2p}{p} \binom{n+p}{2p}.$$

D'après ce qui précède, on obtient bien un nombre pair.

IV.B.2) D'après la partie II, $K_n = \sqrt{2n+1} L_n$ avec $L_n = ((X^2 - X)^n)^{(n)}$.

Or $(X^2 - X)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} X^{n+p}$, et la dérivée n -ième de X^{n+p} est $\binom{n+p}{p} X^p$, donc

$\Lambda_n = L_n = \sum_{p=0}^n \binom{n+p}{p} \binom{n}{p} (-1)^{n-p} X^p$. Il s'agit bien d'un polynôme à coefficients entiers, de terme constant égal à $(-1)^n$, et dont tous les coefficients de degré compris entre 1 et n sont pairs d'après la question précédente.

IV.B.3) a) et b) Par analogie avec la question IV.A, on pose $S_{n,j} = \sum_{i=1}^n h_{i,j}^{(-1,n)} X^{i-1}$.

Comme $H_n^t(h_{1,j}^{(-1,n)}, \dots, h_{n,j}^{(-1,n)}) = E_j$ (j -ème vecteur colonne de la base canonique), on obtient avec les notations du IV.A et la même méthode la relation $(*) : \langle S_{n,j}, Q \rangle = \alpha_{j-1}$.

En particulier, $\langle S_{n,j}, K_p \rangle = K_{p,j-1}$ (coefficient de degré $j-1$ de K_p), d'où, puisque $(K_0, \dots, K_{n-1})$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $S_{n,j} = \sum_{p=0}^{n-1} K_{p,j-1} K_p$.

D'après $(*)$, on a $\langle S_{n,j}, S_{n,i} \rangle = h_{j,i}^{(-1,n)} = h_{i,j}^{(-1,n)}$. D'autre part, en décomposant dans la base

orthonormée $(K_0, \dots, K_{n-1})$, on obtient $\langle S_{n,j}, S_{n,i} \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} K_{p,j-1} K_{p,i-1}$.

D'après B.2, $K_{p,i-1} = \sqrt{2p+1} (-1)^{p-i+1} \binom{p+i-1}{i-1} \binom{p}{i-1}$ si $p \geq i-1$, et $K_{p,i-1} = 0$ si $p < i-1$.

On en déduit $h_{i,j}^{(-1,n)} = (-1)^{i+j} \sum_{p=\max(i-1, j-1)}^{n-1} (2p+1) \binom{p+i-1}{i-1} \binom{p}{i-1} \binom{p+j-1}{j-1} \binom{p}{j-1}$.

Il s'agit donc d'un entier.

En particulier, on trouve $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n+1) \binom{2n-2}{n-1}^2$ et $h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = n^2$.

c) D'après B.1, pour $p \geq i-1$, $\binom{p+i-1}{i-1} \binom{p}{i-1}$ est pair, donc pour i et $j \geq 2$ et $p \geq i-1$ et $j-1$, le produit $\binom{p+i-1}{i-1} \binom{p}{i-1} \binom{p+j-1}{j-1} \binom{p}{j-1}$ est multiple de 4. L'expression de $h_{i,j}^{(-1,n)}$ trouvée à la question précédente montre alors que c'est un entier multiple de 4.