

Exercice I

1°) f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique χ_f est défini par :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 2 & 4 \\ 12 & 3-X & 8 \\ -12 & -4 & -9-X \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2}{=} \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 3+3X & 3-X & 8 \\ 0 & -4 & -9-X \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}{=} (1+X) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 9-X & 20 \\ 0 & -4 & -9-X \end{vmatrix} = -(1+X)(X^2 - 81 + 80) = (1+X)^2(1-X).$$

g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On obtient, par développement selon la première colonne :

$$\chi_g(X) = \begin{vmatrix} -1-X & -2 & -2 \\ 0 & -3-X & -2 \\ 0 & 4 & 3-X \end{vmatrix} = -(1+X)(X^2 - 9 + 8) = (1+X)^2(1-X).$$

$$\boxed{\chi_f(X) = \chi_g(X) = (1+X)^2(1-X).}$$

Les valeurs propres de f et g sont donc -1 (double), et 1 .

2°) Équations des sous-espaces propres de f :

$\text{Ker}(f - \text{Id})$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ 12x + 2y + 8z = 0 \\ -12x - 4y - 10z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{Id}) \text{ est la droite vectorielle d'équations } \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases} .}$$

$\text{Ker}(f + \text{Id})$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 0 \\ 12x + 4y + 8z = 0 \\ -12x - 4y - 8z = 0 \end{cases} \iff 3x + y + 2z = 0$$

$$\boxed{\text{Ker}(f + \text{Id}) \text{ est le plan vectoriel d'équation } 3x + y + 2z = 0.}$$

Équations des sous-espaces propres de g :

$\text{Ker}(g - \text{Id})$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ker}(g - \text{Id}) \text{ est la droite vectorielle d'équations } \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases} .}$$

$\text{Ker}(g + \text{Id})$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} -2y - 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases} \iff y + z = 0$$

$$\boxed{\text{Ker}(g + \text{Id}) \text{ est le plan vectoriel d'équation } y + z = 0.}$$

3°) Recherche d'une base $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ de vecteurs propres communs à f et g :
on constate que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \subset \text{Ker}(g + \text{Id})$, et $\text{Ker}(g - \text{Id}) \subset \text{Ker}(f + \text{Id})$.

On peut donc choisir par exemple V_1 dans $\text{Ker}(f - \text{Id})$, V_2 dans $\text{Ker}(g - \text{Id})$, et V_3 dans $\text{Ker}(g + \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \text{Id})$.

Ce dernier sous-espace a pour équations $\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = -3x \end{cases}$

Avec le choix d'une première composante égale à 1, cela donne :

$$\boxed{V_1 = (1, 2, -2); \quad V_2 = (1, 1, -2); \quad V_3 = (1, 3, -3).}$$

4°) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donc

$$\boxed{P = \text{Pass}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.}$$

On peut obtenir la matrice inverse par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donc

$$\boxed{P^{-1} = \text{Pass}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$f(V_1) = V_1$, $f(V_2) = -V_2$, et $f(V_3) = -V_3$, donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$g(V_1) = -V_1$, $g(V_2) = V_2$, et $g(V_3) = -V_3$, donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Exercice II

1°) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \end{cases} \quad (1)$$

Il est immédiat que tous ses termes sont positifs;

pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n+1} a_{n-1} \geq 0$, donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1, et en particulier,

$$\forall n \geq 1, \quad a_n \geq a_1 = 1.$$

Montrons la propriété $\forall n \geq 1, \quad a_n \leq n^2$ par récurrence.

L'inégalité $a_n \leq n^2$ est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ ($a_2 = 2 \leq 4$).

Soit $n \geq 2$ fixé, et supposons que pour tout $k \leq n$, l'inégalité $a_k \leq k^2$ soit vraie. Alors,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \leq n^2 + \frac{2}{n+1} (n-1)^2 \\ &\leq n^2 + \frac{2}{n-1} (n-1)^2 \\ &\leq n^2 + 2(n-1) \\ &\leq n^2 + 2n - 2 \\ &\leq n^2 + 2n + 1 \\ &\leq (n+1)^2. \end{aligned}$$

L'inégalité $a_k \leq k^2$ est donc vraie pour $k = n+1$. En conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 1, \text{ on a : } 1 \leq a_n \leq n^2.}$$

L'inégalité précédente montre que, si R_1 désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$, R_2 celui de $\sum n^2 x^n$, et R celui de $\sum a_n x^n$, on a :

$$R_2 \leq R \leq R_1.$$

Comme $R_1 = 1$ (série géométrique de raison x), et $R_2 = 1$ (appliquer la règle de d'Alembert), on en déduit :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum a_n x^n \text{ vaut } 1.}$$

2°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. En multipliant les deux membres de (1) par $(n+1)x^n$, et en sommant pour n variant de 1 à N , on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (n+1)a_{n+1}x^n &= \sum_{n=1}^N (n+1)a_n x^n + 2 \sum_{n=1}^N a_{n-1}x^n \\ \sum_{n=1}^N (n+1)a_{n+1}x^n &= x \sum_{n=1}^N n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^N a_n x^n + 2x \sum_{n=1}^N a_{n-1}x^{n-1} \end{aligned} \quad (2)$$

La série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ s'obtient par dérivation terme à terme de $\sum a_n x^n$, donc a le même rayon de convergence, 1. La série entière $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ se déduit de $\sum n a_n x^{n-1}$ par réindexation, de même que $\sum a_{n-1}x^{n-1}$ vis-à-vis de $\sum a_n x^n$. Donc, toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence 1.

Ainsi, lorsque x est dans $] -1, 1[$, on peut passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans (2), et on a alors :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} \quad (3).$$

$$\text{Comme } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \text{ on a : } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + S(x).$$

La somme de la série dérivée terme à terme $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ est $S'(x)$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = S'(x) - a_1.$$

On obtient donc dans (3) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S'(x) - 1 = x S'(x) + S(x) + 2x(1 + S(x)).$$

La fonction S est donc solution sur $] - 1, 1[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\boxed{(1-x)y' - (1+2x)y = 1+2x \quad (E).}$$

3°) Résolvons (E) sur $] - 1, 1[$:

– le fonction constante -1 est une solution évidente;

– une primitive sur $] - 1, 1[$ de $x \mapsto \frac{1+2x}{1-x} = -2 + \frac{3}{1-x}$ est $x \mapsto -2x - 3 \ln(1-x)$, donc l'équation homogène associée a pour solutions sur $] - 1, 1[$ les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-2x-3 \ln(1-x)} = \lambda \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Les solutions de (E) sur $] - 1, 1[$ sont donc les fonctions de la forme : $x \mapsto -1 + \lambda \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

La fonction S vérifie la condition initiale $S(0) = 0$, donc est obtenue pour $\lambda = 1$. On a ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} - 1.}$$

4°) La fonction constante -1 trouvée précédemment répond à la question.

Question subsidiaire : est-ce la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

La résolution du 3°) est en fait valable sur l'intervalle $] - \infty, 1[$.

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, les calculs sont analogues et on trouve des solutions de la forme

$$x \mapsto -1 + \mu \frac{e^{-2x}}{(x-1)^3} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors
$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x < 1, & f(x) = -1 + \lambda \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}; \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x > 1, & f(x) = -1 + \mu \frac{e^{-2x}}{(x-1)^3}. \end{cases}$$

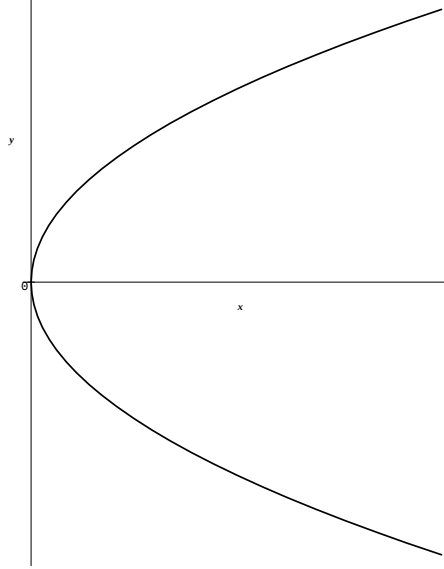
L'existence d'une limite finie en 1 impose $\lambda = \mu = 0$; donc

$$\boxed{(E) \text{ admet une seule solution sur } \mathbb{R}, \text{ la fonction constante } -1.}$$

Exercice III

1°) $\mathcal{P}$ est la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}, \\ y = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, c'est donc la courbe d'équation cartésienne $y^2 = 2px$, $y \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la parabole de sommet O , d'axe Ox , de foyer $(\frac{p}{2}, 0)$, parcourue toute entière (y décrit $\mathbb{R}$).

$\mathcal{P}$ est une parabole.



2°) Le vecteur dérivé est $\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{t}{p} \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, donc le paramétrage donné est régulier, et la normale en tout point est la droite passant par $M(t) = \frac{t^2}{2p}\vec{i} + t\vec{j}$, et orthogonale à $\frac{d\vec{M}}{dt}$.

Un point $N(x, y)$ du plan est sur normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{M(t)N} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = 0$, soit encore $\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) \frac{t}{p} + (y - t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{p}x + y - t - \frac{t^3}{2p^2} = 0 \Leftrightarrow 2ptx + 2p^2y = t^3 + 2p^2t$.

Une équation cartésienne de la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ est : $2ptx + 2p^2y = t^3 + 2p^2t$.

3°) La normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ passe par le point $M(\theta)$ de $\mathcal{P}$ si et seulement si les coordonnées $(\frac{\theta^2}{2p}, \theta)$ de ce point vérifient l'équation de cette normale :

$$2pt \frac{\theta^2}{2p} + 2p^2\theta = t^3 + 2p^2t \Leftrightarrow t(\theta^2 - t^2) + 2p^2(\theta - t) = 0 \Leftrightarrow (\theta - t)(t(\theta + t) + 2p^2) = 0.$$

Comme $M(\theta) \neq M(t)$, on a $\theta - t \neq 0$, et on peut conclure :

$\theta \in \mathbb{R}$ étant donné, la normale en $M(t) \neq M(\theta)$ passe par $M(\theta)$ si et seulement si t vérifie

$$t^2 + \theta t + 2p^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré en t est $\Delta = \theta^2 - 8p^2$, d'où la discussion :

– si $\theta > 2p\sqrt{2}$, il existe deux tels points $M(t_1)$ et $M(t_2)$; – si $\theta = 2p\sqrt{2}$, il existe un point $M(t)$ $\left(t = -\frac{\theta}{2}\right)$; – si $\theta < 2p\sqrt{2}$, il n'existe pas de point $M(t)$.

4°) Si une droite coupant $\mathcal{P}$ en deux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ distincts tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points se coupent sur $\mathcal{P}$, alors, en notant θ le paramètre du point de $\mathcal{P}$ situé sur ces deux normales, par le point $M(\theta)$ passent deux normales distinctes, donc, d'après la discussion précédente, $|\theta| > 2p\sqrt{2}$, et les paramètres t_1 et t_2 des points distincts en question sont les solutions de l'équation $t^2 + \theta t + 2p^2 = 0$.

Ils vérifient donc :
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -\theta \\ t_1 t_2 = 2p^2 \end{cases}.$$

Une telle droite $(M(t_1)M(t_2))$ est dirigée par $\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)} = \begin{pmatrix} \frac{t_2^2 - t_1^2}{2p} \\ t_2 - t_1 \end{pmatrix} = \frac{t_2 - t_1}{2p} \begin{pmatrix} t_2 + t_1 \\ 2p \end{pmatrix},$

donc un vecteur directeur a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\theta \\ 2p \end{pmatrix}.$

Une équation cartésienne de $(M(t_1)M(t_2))$ est :

$$\begin{vmatrix} x - \frac{t_1^2}{2p} & -\theta \\ y - t_1 & 2p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2px + \theta y - t_1(t_1 + \theta) = 0 \Leftrightarrow 2px + \theta y + t_1 t_2 = 0 \Leftrightarrow 2px + \theta y + 2p^2 = 0.$$

L'ensemble des droites coupant $\mathcal{P}$ en deux points distincts tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points se coupent sur $\mathcal{P}$ est l'ensemble des droites d'équations $2px + \theta y + 2p^2 = 0$, où θ décrit $] -\infty, -2p\sqrt{2}[\cup]2p\sqrt{2}, +\infty[.$

Il s'agit donc d'une partie du faisceau linéaire de droites concourantes en le point de coordonnées $(-p, 0).$

Les droites coupant $\mathcal{P}$ en deux points distincts tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points se coupent sur $\mathcal{P}$ passent par le point de coordonnées $(-p, 0).$

Exercice IV

1°) Notons $\vec{p} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, et $\vec{q} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$.

Dans le repère (orthonormé) $(O, \vec{p}, \vec{q}, \vec{k})$, la surface $\mathcal{S}$ a pour paramétrage :

$$(t, u) \mapsto M(t, u) = O + a \vec{p} + u \vec{q} + (at + u) \vec{k}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^2.$$

Elle est de classe C^1 , et pour tout (t, u) de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}(t, u) &= a \vec{q} - u \vec{p} + a \vec{k}; & \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(t, u) &= \vec{q} + \vec{k}. \\ \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \right)(t, u) &= u \vec{q} - u \vec{k}. \end{aligned}$$

Le point $M(t, u)$ est donc stationnaire si et seulement si $u = 0$.

L'ensemble des points stationnaires de $\mathcal{S}$ est donc la courbe de paramétrage

$$t \mapsto M(t, 0) = O + a \vec{p} + at \vec{k}, \quad t \in \mathbb{R};$$

on reconnaît la courbe $\mathcal{C}$.

L'ensemble des points réguliers de $\mathcal{S}$ est $\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$.

Les calculs qui précèdent montrent que la normale à $\mathcal{S}$ en tout point régulier est dirigée par

$$\vec{n} = \vec{q} - \vec{k} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} - \vec{k};$$

un point $N = O + x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ de l'espace est dans le plan tangent en $M(t, u)$ à $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$\vec{M}(t, u) \vec{n} \cdot \vec{n} = 0 \iff -\sin t (x - a \cos t + u \sin t) + \cos t (y - a \sin t - u \cos t) - (z - at - u) = 0$$

$$\iff -x \sin t + y \cos t - z + at = 0.$$

Une équation du plan tangent en un point régulier de $\mathcal{S}$ est : $-x \sin t + y \cos t - z + at = 0$.

2°) Le paramétrage de $\mathcal{S}$ peut se mettre sous la forme

$$(t, u) \mapsto M(t, u) = \left(O + a \vec{p} + at \vec{k} \right) + u \left(\vec{q} + \vec{k} \right) = P(t) + u \vec{K}(t), \quad (t, u) \in \mathbb{R}^2,$$

où les fonctions $t \mapsto P(t)$ et $t \mapsto \vec{K}(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et la fonction $t \mapsto \vec{K}(t)$ ne s'annule pas.

$\mathcal{S}$ est une surface réglée, engendrée par les droites passant par $P(t)$ et dirigées par $\vec{K}(t) = \vec{q} + \vec{k}$.

Le paramètre u est le paramètre de parcours de chaque génératrice de $\mathcal{S}$, et la question 1°) montre que le plan tangent en un point régulier de $\mathcal{S}$ ne dépend pas de u ; il en résulte que le plan tangent est le même en tout point régulier d'une génératrice :

la surface $\mathcal{S}$ est développable.

3°) $\mathcal{C}$ est la courbe de paramétrage $t \mapsto P(t) = O + a \vec{p} + at \vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$; elle est de classe C^1 , et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\frac{d\vec{P}}{dt} = a \vec{q} + a \vec{k} = a \vec{K}(t)$.

$\mathcal{C}$ est donc régulière, et la tangente à $\mathcal{C}$ au point $P(t)$ est dirigée par $\vec{K}(t)$; on reconnaît une génératrice de $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ est engendrée par les tangentes à $\mathcal{C}$.

4°) $\mathcal{C}$ est de classe C^2 , et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = -a \vec{p}$; $\frac{d\vec{P}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = -a^2 (\vec{q} - \vec{k}) \neq \vec{0}$, donc $\mathcal{C}$ est birégulière, et le plan osculateur en tout point est le plan passant par $P(t)$ et normal à $\vec{q} - \vec{k} = \vec{n}$ (cf 1°)). Il s'agit donc du plan tangent à $\mathcal{S}$ le long de la génératrice de $P(t)$.

Le plan osculateur à $\mathcal{C}$ en $P(t)$ et le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M(t, u)$ ($u \neq 0$) coïncident.