CONCOURS COMMUN MINES, PONTS, TELECOM,.. 1977

OPTIONS M ET P' - 1ERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 3 pages

----

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Dans tout le problème, K désigne un corps commutatif ayant au moins trois éléments, K^* désigne $K - \{0\}$.

PARTIE I

On donne un espace vectoriel E sur K de dimension finie $n \geqslant 2$; on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre sur K des endomorphismes vectoriels de E. On donne un élément f de $\mathcal{L}(E)$; on note f^* l'élément de $\mathcal{L}(E^*)$ transposé de f.

Si $\beta = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, on note $\beta^* = (e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base de E^* duale de la base β, et pour i entier entre 1 et $n-1$ (resp. 1 et n) $c_{\beta,f}(i)$ le scalaire $e_{i+1}^*\big(f(e_i)\big)$ (resp. $d_{\beta,f}(i)$ le scalaire $e_i^*\big(f(e_i)\big)$. On note également, pour i entier entre 0 et n, $V_\beta(i)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant i}$. (En particulier : $V_\beta(0) = \{0\}$).

On dit que β est f-adéquate si : $(\forall i \in \{1,\dots,n-1\})\ (f(V_\beta(i)) \subset V_\beta(i+1))$.

On dit que β est f-adaptée si β est f-adéquate, et si l'on a en outre :

$$(\forall i \in \{1,\dots,n-1\})\quad \Big(\sum_{k=i}^{n-1} c_{\beta,f}(k) \neq 0\Big) .$$

On rappelle enfin que toute base de E^* est la base duale d'une base de E .

1°) Si $\beta = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base f-adéquate de E, et si $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ appartient à $(K^*)^n$, montrer que $(\lambda_i e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base f-adéquate de E .

2°) En déduire que, s'il existe une base f-adéquate β de E telle que : $c_{\beta,f}(n-1) \neq 0$, il existe une base f-adaptée de E .

3°) Soit a un vecteur non nul de E . Montrer qu'il existe une base f-adéquate de E : $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que : $e_1 = a$.

4°) Soient $\gamma = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E^* , $\beta = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base de E telle que : $\beta^* = \gamma$, β' la base $(e_{n+1-i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E . On suppose que γ est f^*-adéquate . Montrer que β' est f-adéquate, et que l'on a :

$$c_{\beta',f}(n-1) = c_{\gamma,f^*}(1) .$$

5°) En utilisant les trois questions précédentes, montrer que, si f n'est pas une homothétie vectorielle, il existe des bases f-adaptées de E.

.../...

6°) a - Vérifier que le scalaire $\sum_{i=1}^{n} d_{\beta,f}(i)$ est indépendant de β base de E . On le note pour la suite T(f).

b - Si $\beta = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base f-adéquate de E, si x appartient à E, on note $h_{\beta,x}$ l'élement de $\mathcal{L}(E)$ défini par les égalités :

$$h_{\beta,x}(e_n) = x \quad \text{et} \quad (\forall i\in\{1,\dots,n-1\})\ (h_{\beta,x}(e_i) = e_{i+1}) ,$$

puis l'on note $g_{\beta,x}$ l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par les égalités :

$$g_{\beta,x}(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall i\in\{2,\dots,n\})\Big(g_{\beta,x}(e_i)\Big) = \sum_{k=0}^{i-2} h^k_{\beta,x} \circ f(e_{i-1-k})$$

(où, comme d'habitude, $h^k_{\beta,x}$ est l'itérée k-ième de $h_{\beta,x}$, avec en particulier : $h^0_{\beta,x} = Id_E$). Montrer que $g_{\beta,x}$ est indépendant de x . On note désormais g_β cet endomorphisme.

c - On conserve les hypothèses et notations précédentes (β, x, $h_{\beta,x}$, g_β ...).

On introduit l'endomorphisme vectoriel ϕ_β de E égal à : $g_\beta - \Big(\sum_{k=1}^{n-1} c_{\beta,f}(k)\Big)\, Id_E$

et le vecteur y de E égal à : $f(e_n) - d_{\beta,f}(n)e_n + \sum_{k=1}^{n-1} h^{n-k}_{\beta,x}\,(f(e_k) - c_{\beta,f}(k)e_{k+1} - d_{\beta,f}(k)e_k)$.

Montrer successivement : y appartient à $V_\beta(n-1)$; $\phi_\beta(E) \subset V_\beta(n-1)$.

Montrer que, pour que : $g_\beta \circ h_{\beta,x} - h_{\beta,x} \circ g_\beta = f$, il faut et il suffit que l'on ait : $\phi_\beta(x) = T(f)\, e_n + y$. Déduire de ce qui précède qu'il faut que l'on ait : T(f) = 0 .

d - On note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E de la forme : $u \circ v - v \circ u$, avec u,v dans $\mathcal{L}(E)$. Déduire de ce qui précède que, pour que f appartienne à $\mathcal{C}(E)$, il faut et il suffit que l'on ait : T(f) = 0.

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}(E)$ de $\mathcal{L}(E)$?

PARTIE II

Dans cette partie, on suppose le corps K de caractéristique nulle, en particulier infini, et l'on donne un entier $n \geq 2$. Si M est une matrice carrée n×n dans K, on note m_i^j l'élément de M d'indice de ligne i, de colonne j (i,j entre 1 et n).

On note $\mathcal{M}_n$ l'algèbre sur K des matrices carrées n×n dans K ,

GL_n l'ensemble des éléments M de $\mathcal{M}_n$ qui sont inversibles

$\mathcal{T}_n$ " " tels que : $\sum_{k=1}^{n} m_k^k = 0$

$\mathcal{N}_n$ " " tels que : $(\forall k\in\{1,\dots,n\})\,(m_k^k = 0)$

$\mathcal{D}_n$ " " tels que : $(\forall (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2)\,(i\neq j \Rightarrow m_i^j = 0)$

.../...

1°) Vérifier que $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{N}_n$, $\mathcal{D}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$ qui admettent n^2-1, $n(n-1)$, n pour dimensions respectives.

2°) Pour M dans $\mathcal{M}_n$, montrer l'équivalence :

$M \in \mathcal{C}_n \Longleftrightarrow$ Il existe A dans $\mathcal{M}_n$, B dans $\mathcal{N}_n$, P dans GL_n tels que :

$$M = P^{-1}(AB - BA)P .$$

3°) Pour M dans $\mathcal{M}_n$, montrer l'équivalence :

$M \in \mathcal{N}_n \Longleftrightarrow$ Il existe A dans $\mathcal{D}_n$, B dans $\mathcal{M}_n$ tels que : $M = AB - BA$.

4°) Pour M dans $\mathcal{M}_n$, montrer l'équivalence :

$M \in \mathcal{C}_n \Longleftrightarrow$ Il existe N dans $\mathcal{N}_n$, P dans GL_n tels que : $M = P^{-1}NP$.

(On pourra par exemple montrer qu'un élément M de $\mathcal{C}_n$ est semblable à un élément M' de $\mathcal{C}_n$ qui vérifie : $m'^1_1 = 0$, puis raisonner par récurrence sur n).

5°) Pour M dans $\mathcal{M}_n$, montrer l'équivalence :

$M \in \mathcal{C}_n \Longleftrightarrow$ Il existe A, B dans $\mathcal{M}_n$, avec $M = AB - BA$, et A diagonalisable.

6°) On suppose dans cette question exclusivement $K = \mathbb{R}$, et l'on note $\mathbf{O}_n$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ réelles orthogonales.

a - Pour M dans $\mathcal{M}_n$, montrer l'équivalence :

$M \in \mathcal{C}_n$ et M symétrique $\Longleftrightarrow$ Il existe N dans $\mathcal{N}_n$, symétrique, et Ω dans O_n tels que : $M = \Omega^{-1} N \Omega$.

b - Pour M dans $\mathcal{M}_n$, montrer l'équivalence :

$M \in \mathcal{C}_n$ et M symétrique $\Longleftrightarrow$ Il existe A dans $\mathcal{M}_n$, symétrique, B dans $\mathcal{M}_n$ antisymétrique tels que : $M = AB - BA$.

c - L'équivalence précédente est-elle valable pour tout corps infini **K** ?
