

Notations.

On note V le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications continues f de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} , intégrables sur $]0, 1]$. On note W le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications continues f de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} , telles que f^2 soit intégrable sur $]0, 1]$.

Partie I : Un espace préhilbertien...

- 1°) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V .
- 2°) Montrer que si l'on pose, pour f et g appartenant à W , $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$, on définit un produit scalaire préhilbertien ; W sera désormais muni de cette structure.
- 3°) Étudier l'appartenance à V et l'appartenance à W des restrictions à $]0, 1]$ des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \ln x$$

$$f_2 : x \mapsto x^{-\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{x(1 - \ln x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

Partie II : ...et un opérateur autoadjoint.

- 1°) Soit f un élément de V . On pose, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$F(x) = \ln x \int_0^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) \ln t dt .$$

- a) Montrer que $F(x)$ existe pour tout $x \in]0, 1]$.
- b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, 1]$.
- c) Établir la relation, valable pour tout $x \in]0, 1]$:

$$xF''(x) + F'(x) = f(x) .$$

- 2°) Soit f un élément de V et F définie comme ci-dessus.
 - a) Quelle est la valeur de $F(1)$?
 - b) Quelle est la limite de $xF'(x)$ lorsque x tend vers 0 ?
 - c) Donner un exemple d'élément f de V tel que F ne soit pas bornée ; on pourra utiliser une fonction du type $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^\alpha}$ avec α convenablement choisi.

- 3°) f désigne toujours une fonction de V et F la fonction définie au début de cette partie.

- a) Établir l'existence d'une constante $A > 0$ telle que, pour tout $x \in]0, 1]$, l'on ait $|F'(x)| \leq \frac{A}{x}$.

- b) Établir que $F \in W$.

- 4°) À tout élément f de V on associe ainsi F qui appartient aussi à V , ce qui définit donc une application T de V dans V , manifestement linéaire.

T est-elle injective ?

- 5°) On suppose ici que f appartient à W ; $T(f)$ a-t-elle une limite en 0 ? $T(f)$ est-elle bornée ? On pourra établir :

$$\forall x \in]0, 1], |F'(x)| \leq \sqrt{\frac{\langle f|f \rangle}{x}}, \text{ avec toujours } F = T(f).$$

- 6°) a) Montrer que la restriction de T à W est un endomorphisme autoadjoint de W .

- b) Montrer que la restriction de $-T$ à W est un endomorphisme autoadjoint positif de W . Est-il défini positif ?

Partie III : Éléments propres de T .

- 1°) Démontrer que les valeurs propres de T , s'il en existe, sont strictement négatives et que les vecteurs propres de T appartiennent en fait à W .

- 2°) Soit λ un nombre réel strictement positif. Montrer que, si f est vecteur propre de T pour la valeur propre $-\lambda$, alors l'application de $]0, \frac{1}{\lambda}]$ dans \mathbb{R} qui à x associe $f(\lambda x)$ est, dans son intervalle de définition, solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad xy'' + y' + y = 0 .$$

- 3°) Montrer que (E) admet une solution h développable en série entière et une seule, de la forme $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, avec $a_0 = 1$, et de rayon de convergence $R > 0$. On donnera l'expression de a_n et la valeur de R .

- 4°) a) Établir qu'il existe r_1 réel tel que $h(r_1) = 0$ et que, pour tout $x < r_1$, $h(x) > 0$. On pourra commencer par étudier le signe de $h'(x)$ sur $[0, 2]$.

- b) Justifier de façon rigoureuse l'encadrement $1, 4 < r_1 < 1, 5$.

- 5°) a) Soient b et c deux réels tels que $0 < b < c \leq r_1$. Soit y une application de $]0, c[$ dans \mathbb{R} , solution de (E) ; établir à l'aide de la fonction $z = \frac{y}{h}$ l'existence de deux constantes A et B telles que

$$\forall x \in]0, c[, \quad y(x) = Ah(x) + Bh(x) \int_b^x \frac{dt}{th(t)^2} .$$

b) Étudier la limite de $y(x)$ quand x tend vers 0.

6°) Dédire de ce qui précède que, si f est vecteur propre de T pour la valeur propre $-\lambda$, alors il existe μ réel tel que

$$\forall x \in]0, 1], \quad f(x) = \mu h\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

7°) Soit inversement un nombre réel $\lambda > 0$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} qui à x associe $h\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ soit vecteur propre de T . Quel lien existe-t-il entre les zéros de h et les valeurs propres de T ?

8°) Établir qu'à chaque valeur propre de T correspond un sous-espace propre de dimension 1 et que ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux pour la structure préhilbertienne de W .

Partie IV : La fonction de Bessel et ses zéros.

1°) Soit y une solution de E dans un intervalle I inclus dans $]0, +\infty[$. Mettre sous une forme aussi simple que possible les dérivées premières des fonctions qui à x associent respectivement $xy'(x)^2 + y(x)^2$ et $x^2y'(x)^2 + xy(x)^2$.

2°) a) Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $xh'(x)^2 + h(x)^2$ tend vers une limite $L \geq 0$.

b) En déduire que h est bornée dans \mathbb{R}_+ et que h' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3°) a) Établir l'existence des quatre intégrales suivantes, où a désigne un réel strictement positif quelconque (a priori comme intégrales impropres) :

$$\int_a^\infty h'(x)^2 dx, \quad \int_a^\infty h(x)h''(x) dx, \\ \int_a^\infty \frac{h(x)h'(x)}{x} dx, \quad \int_a^\infty \frac{h(x)^2}{x} dx$$

b) En déduire que $L = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

c) Montrer que les fonctions h'^2 , hh'' , $x \mapsto \frac{h(x)h'(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{h(x)^2}{x}$ sont intégrables sur $[a, +\infty[$.

4°) On suppose, dans cette seule question, qu'il existe $r > 0$ tel que $h(r) = 0$ et que, pour tout $x \geq r$, l'on a $h(x) \geq 0$.

a) Que dire du sens de variation de $xh'(x)$ pour $x \geq r$?

b) On suppose que l'on connaît une valeur $c > r$ telle que $h'(c) < 0$; trouver une fonction majorant h sur $[c, +\infty[$ et en tirer une contradiction.

c) En déduire que h est croissante sur $[r, +\infty[$. Est-ce possible?

5°) Montrer que h admet une infinité de zéros.

6°) Soit r un zéro de h .

a) Démontrer l'existence d'au moins un zéro de h' sur $]r, +\infty[$.

b) Soit q un tel zéro de h' . Établir que

$$\forall x > r, \quad |h'(x)| \leq |h'(r)|.$$

En déduire une majoration de $\left| \int_r^q h(x) dx \right|$.

c) À l'aide de l'intégrale précédente, établir l'inégalité

$$q \geq r + \sqrt{2r}.$$

7°) a) Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, l'intervalle $[n, n+1[$ contient au plus un zéro de h .

b) Établir que l'on peut ranger les zéros de h en une suite strictement croissante (r_n) , de limite infinie, et telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n+1} - r_n = +\infty.$$

c) Trouver une constante $K > 0$ telle que pour tout entier $n \geq 1$ on ait $r_n \geq Kn^2$.

8°) Donner l'allure de la courbe représentative de h . On établira que, dans chaque intervalle $[r_n, r_{n+1}]$, h' s'annule une fois et une seule et que la suite qui à n associe $M_n = \text{Max}\{|h(x)| / x \in [r_n, r_{n+1}]\}$ est décroissante et tend vers 0.