

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS - FILIÈRE PC

Deuxième épreuve de Mathématiques - Concours 2024

Proposition de corrigé

Problème inverse pour les matrices de distance euclidienne

1 Matrices de Hadamard

Par caractérisation des matrices orthogonales, une *matrice de Hadamard* H d'ordre n est une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou -1 et telle que ses lignes, comme ses colonnes, sont deux à deux orthogonales, et forcément de norme euclidienne \sqrt{n} : $\frac{1}{\sqrt{n}} H$ est orthogonale.

1▷ Les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont des matrices de Hadamard d'ordre 1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ainsi que

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sont orthogonales : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de Hadamard d'ordre 2.

2▷ Soit H une matrice de Hadamard. Les colonnes C_1, \dots, C_n de $\frac{1}{\sqrt{n}} H$, comme ses lignes L_1, \dots, L_n , forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n : toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de $\frac{1}{\sqrt{n}} H$ ne change pas cette condition, comme cela ne change pas que les nouveaux coefficients de cette matrice transformée depuis H a ses coefficients dans $\{-1, 1\}$ donc c'est encore une matrice de Hadamard.

3▷ Soit $H = (h_{i,j})$ une matrice de Hadamard d'ordre n . D'après la question précédente, multiplier successivement, pour j de 1 à n , sa $j^{\text{ème}}$ colonne par $h_{1,j}$ de $\{-1, 1\}$, cette nouvelle matrice est encore une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux aux $(h_{1,j})^2$ donc à 1.

Si $n \geq 2$, la deuxième ligne d'une telle matrice est orthogonale à la première ligne donc elle a autant de 1 et de -1 donc le nombre de colonne, n est pair.

4▷ Soit H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4. D'après la deuxième question, il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont tous les coefficients de la première ligne sont uniquement composée de 1 ; n est pair et la deuxième ligne, comme les suivantes, est composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 et de $n/2$ coefficients égaux à -1 . Quitte à échanger les colonnes pour placer ces 1 sur les $n/2$ premières colonnes, on peut créer une nouvelle matrice de Hadamard d'ordre n dont tous les coefficients de la première ligne sont uniquement composés de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1 .

Si $n \geq 3$, la troisième ligne d'une telle matrice est orthogonale à la première ligne et à la deuxième ligne donc, en particulier, elle a autant de 1 et de -1 dans les $n/2$ premiers coefficients, autant de 1 et de -1 dans les $n/2$ derniers coefficients donc $n/2$ est lui-même pair : n est un multiple de 4.

2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

On note les valeurs propres classées par ordre croissant de f . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on introduit l'ensemble π_k des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension k . On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérées).

5▷ f est un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n donc, par application du Théorème Spectral, il existe une base (e_1, \dots, e_n) orthonormée de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de f . On choisit ici une indexation qui respecte l'ordre croissant des valeurs propres.

6▷ Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et S_k un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension k . $T_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ est de dimension $n - k + 1$, puisque cette famille est libre, donc d'après la formule de Grassman, on a :

$$\dim(S_k \cap T_k) = \dim(S_k) + \dim(T_k) - \dim(S_k \cup T_k) \geq k + (n - k + 1) - n = 1 \implies S_k \cap T_k \neq \{0\}.$$

7▷ Soit $x \in S_k \cap T_k$, non nul ; il existe $\alpha_k, \dots, \alpha_n$ réels tels que :

$$x = \sum_{j=k}^n \alpha_j e_j \quad \text{et} \quad (x, f(x)) = \left(\sum_{j=k}^n \alpha_j e_j, \sum_{i=k}^n \alpha_i \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=k}^n \alpha_i^2 \lambda_i \geq \sum_{i=k}^n \alpha_i^2 \lambda_k = \lambda_k \|x\|^2.$$

$$\implies \lambda_k \leq \left(\frac{x}{\|x\|}, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right) \leq \max_{y \in S_k, \|y\|=1} (y, f(y)).$$

8▷ Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $S_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \in \pi_k$ et, pour tout $x \in S_k$ non nul ; il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ réels tels que :

$$x = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \quad \text{et} \quad (x, f(x)) = \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \lambda_j \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \lambda_k = \lambda_k \|x\|^2 \implies \lambda_k \geq \left(\frac{x}{\|x\|}, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right).$$

$$\implies \lambda_k \geq \max_{y \in S_k, \|y\|=1} (y, f(y)) \geq \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{z \in S, \|z\|=1} (z, f(z)) \right).$$

Donc, par double inégalité, on a :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right).$$

9▷ Soit M une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le Théorème Spectral, il existe P de $O_n(\mathbb{R})$ telle que : $P^T M P$ est la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de valeurs positives. Si on pose $B = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^T$, alors $M = B^T \cdot B$.

On suppose à présent que M , matrice symétrique, admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u . $A = \lambda u \cdot u^T - M$ est alors, par combinaison linéaire, une matrice symétrique réelle telle que :

$$A \cdot u = \lambda \|u\| u - \lambda u = 0 \quad \text{et} \quad \left(\forall v \in E_\lambda^\perp = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} E_\mu \right), v^T \cdot A \cdot v = -v^T \cdot M \cdot v \geq 0.$$

donc, d'après la première partie de la question, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T \cdot B$ et donc $M = \lambda u \cdot u^T - B^T \cdot B$.

3 Caractérisation des MDE

10▷

$$P = I_n - \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ \dots \ 1) = \begin{pmatrix} 1 - 1/n & -1/n & \dots & -1/n \\ -1/n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1/n \\ -1/n & \dots & -1/n & 1 - 1/n \end{pmatrix}.$$

P est symétrique ($P^T = I_n^T - \frac{1}{n} (\mathbf{e}^T)^T \cdot \mathbf{e}^T = P$),

$$P^2 = I_n - \frac{1}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T - \frac{1}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T + \frac{1}{n^2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T = I_n - \frac{2}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T + \frac{1}{n^2} \|\mathbf{e}\|^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T = P$$

$$P \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} - \frac{1}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbf{e}^\perp) \quad P \cdot x = x - \frac{1}{n} \mathbf{e} (\mathbf{e}^T \cdot x) = x$$

donc l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à P est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$.

11▷ Soit $D \in \Delta_n$. Avec les notations proposées :

$$D = (d_{i,j}) = \left(\sum_{k=1}^n (x_{i,k} - x_{j,k})^2 \right) = (\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2x_i^T \cdot x_j).$$

$$C \cdot \mathbf{e}^T = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \dots & \dots & \|x_1\|^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \|x_i\|^2 & \dots & \dots & \|x_i\|^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \|x_n\|^2 & \dots & \dots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} \cdot C^T = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \dots & \|x_j\|^2 & \dots & \|x_n\|^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \|x_1\|^2 & \dots & \|x_j\|^2 & \dots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{et} \quad M_A^T \cdot M_A = (x_i^T \cdot x_j) \quad \text{donc} \quad D = C \cdot \mathbf{e}^T + \mathbf{e} \cdot C^T - 2M_A^T \cdot M_A.$$

Si on suppose, de plus, que $D \in \Delta_n$, on a :

$$(T(D))^T = -\frac{1}{2} P^T D^T P^T = T(D), \quad T(D) \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{2} P D P \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{2} P D \cdot 0 = 0$$

d'après la question précédente, et pour tout $v \in \text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$, $P \cdot v = v$ donc $v^T T(D) v = \|M_A v\|^2 \geq 0$:

$$v^T T(D) v = -\frac{1}{2} v^T P^T D P v = -\frac{1}{2} v^T D v = -\frac{1}{2} (v^T C \mathbf{e}^T v + v^T \mathbf{e} C^T v - 2v^T M_A^T \cdot M_A v).$$

Ainsi, $T(D)$ est positive et $T(D) \in \Omega_n$:

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad (\exists (u, v) \in \text{Vect}(\mathbf{e}) \times \text{Vect}(\mathbf{e})^\perp) \quad x^T T(D) x &= x^T T(D) u + x^T T(D) v \\ &= u^T T(D) v + v^T T(D) v = (T(D) u)^T v + v^T T(D) v = \|M_A v\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Remarque : on peut directement utiliser la stabilité de $\text{Vect}(\mathbf{e})$ et donc de son orthogonal $\text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$ par $T(D)$ puisqu'elle est symétrique.

12▷

$$\text{Pour toute } A = (a_{i,j}) \in \Omega_n, K(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & a_{j,j} & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - 2A$$

donc $K(A) = (a_{i,i} + a_{j,j} - 2a_{i,j})$; comme A est symétrique positive, d'après la question 9, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T \cdot B$ donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n (B^T)_{i,k} B_{k,j}$, soit le produit scalaire des vecteurs lignes BL_i et BL_j de B : $K(A) = (\|BL_i\|^2 + \|BL_j\|^2 - 2(BL_i, BL_j))$, c'est-à-dire $K(A) = (\|BL_i - BL_j\|^2)$. Ainsi, on a $\boxed{K(A) \in \Delta_n}$.

13▷ D'après la question 10, $P \cdot \mathbf{e} = 0$ et $\mathbf{e}^T \cdot P^T = \mathbf{e}^T \cdot P = 0^T$. Pour tout $A \in \Omega_n$, $K(A) \in \Delta_n$ donc $T \circ K(A) \in \Omega_n$ et, puisque $A \cdot \mathbf{e} = 0$ et $\mathbf{e}^T \cdot A^T = \mathbf{e}^T \cdot A = 0^T$, on a :

$$-\frac{1}{2}P(\mathbf{e}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\mathbf{e}^T - 2A)P = P A P = A P - \frac{1}{n}\mathbf{e}\mathbf{e}^T A P = A - \frac{1}{n}\mathbf{e}\mathbf{e}^T A = A.$$

Ainsi, on a : $\boxed{T \circ K = \text{Id}_{\Omega_n}}$.

14▷ Soit D une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle.

— Si $D \in \Delta_n$, alors $T(D) \in \Omega_n$ donc $\boxed{-\frac{1}{2}P \cdot D \cdot P}$ est positive d'après la question 11.

— Réciproquement, si $-\frac{1}{2}P D P$ est positive, le fait que $P \cdot \mathbf{e} = 0$ entraîne que $T(D) \in \Omega_n$ et donc que $\boxed{K \circ T(D) = D \in \Delta_n}$:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (K \circ T(D))_{i,j} = (T(D))_{i,i} + (T(D))_{j,j} - 2(T(D))_{i,j} = d_{i,j}$$

$$\text{car } (T(D))_{i,j} = -\frac{1}{2} \left(d_{i,j} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (d_{i,k} + d_{k,j}) + \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} d_{k,\ell} \right) \text{ (diagonale nulle).}$$

15▷ Soit M une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre \mathbf{e} (donc forcément non nulle). D'après la question 9, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \lambda \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T - B^T \cdot B$.

$-\frac{1}{2}P M P = -\frac{1}{2}P \lambda \mathbf{e} \mathbf{e}^T P + \frac{1}{2}P B^T \cdot B P = -\frac{1}{2}P \lambda \mathbf{e} \mathbf{e}^T P + \frac{1}{2}P B^T \cdot B P = \frac{1}{2}(B P)^T (B P)$ donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T T(M) X = \frac{1}{2} \|B P X\|^2 \geq 0$: $\boxed{T(M)}$ est positive et \boxed{M} est MDE d'après la question précédente.

4 Spectre des MDE

16▷ Soit M est MDE d'ordre n . Les distances sur la diagonale sont nulles donc $\text{Tr}(M) = 0$. Or M est symétrique réelle, donc diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pour respecter les notations de

l'énoncé; la trace étant un invariant de similitude, on a donc : $\boxed{\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0}$.

17▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle; D est alors une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle. Soit $x \in \text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$; $P \cdot x = x$, donc, d'après la question 14 :

$$x^T \cdot D \cdot x = (P \cdot x)^T \cdot D \cdot (P \cdot x) = -2x^T \cdot T(D) \cdot x \leq 0.$$

18▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant.

On pose $S_{n-1} = (\text{Vect}(\mathbf{e}))^\perp \in \pi_{n-1}$; d'après la question précédente, pour tout $x \in S_{n-1}$, $x^T \cdot D \cdot x \leq 0$ donc, d'après le théorème de Courant-Fischer :

$$\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in S_{n-1}, \|x\|=1} (x^T \cdot D \cdot x) \leq 0.$$

Enfin, D est non nulle donc l'une de ses valeurs propres au moins est non nulle. Puisque $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$,

$\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i > 0$ (somme de positifs non nulle) : λ_n est l'unique valeur propre strictement positive de D .

5 Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que : $\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ (il n'est peut-être pas judicieux d'avoir changé l'ordre des valeurs propres!). On note U la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}} H$, Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i et $D = U^T \cdot \Lambda \cdot U$.

19▷ $D^T = U^T \cdot \Lambda^T \cdot (U^T)^T = U^T \cdot \Lambda \cdot U = D$ donc D est symétrique. De plus, $U \in O_n(\mathbb{R})$ donc U est inversible d'inverse U^T donc D est semblable à Λ donc D a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec λ_1 d'espace propre de dimension 1 puisque c'est une valeur propre simple.

Enfin, pour tous i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient $d_{i,j}$ de D est :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^n (U^T)_{i,k} (\Lambda \cdot U)_{k,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i} \lambda_k u_{k,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k h_{k,i} h_{k,j} = \frac{1}{n} \lambda_1 h_{1,i} h_{1,j} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \lambda_k h_{k,i} h_{k,j}$$

$$\implies d_{i,j} \geq \frac{1}{n} \lambda_1 + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=2}^n \lambda_k \right) = 0$$

puisque Λ est une matrice diagonale. On remarque que $d_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k h_{1,i}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, D est à coefficients positifs et à diagonale nulle.

20▷ On remarque que $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{e}^T$ est la première ligne de U , orthogonale à toutes les autres, donc :

$$D \mathbf{e} = U^T \Lambda U \mathbf{e} = U^T \Lambda \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \sqrt{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{e}$$

donc \mathbf{e} est vecteur propre de λ_1 et D est MDE d'après la question 15.

21▷ Pour $n = 4$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard d'ordre 4. On pose $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$. En accord avec la construction de cette dernière partie, la matrice suivante est une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\{5, -1, -2, -2\}$:

$$D = U^T \Lambda U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

FIN DU PROBLÈME