

## UN CORRIGÉ du SUJET MINES-PONTS 2022, MATH-2-PSI

---

### PARTIE 1. Matrices semi-simples

- On calcule  $\chi_A = (X - 2)^2$ , donc  $\text{Sp}(A) = \{2\}$ , la matrice  $A$  a une seule valeur propre et n'est pas scalaire, donc elle n'est pas diagonalisable ni sur  $\mathbb{R}$ , ni sur  $\mathbb{C}$ , elle n'est donc pas semi-simple.
- On calcule  $\chi_B = X^2 - 4X + 13 = (X - 2)^2 + 9$ , donc  $\text{Sp}(B) = \{2 - 3i, 2 + 3i\}$ , la matrice  $B$  a deux valeurs propres complexes distinctes, elle est donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , i.e. elle est semi-simple.

Soit  $V \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $2 + 3i$ , soient les vecteurs  $W_1 = \frac{V + \bar{V}}{2} = \text{Re}(V) \in \mathbb{R}^2$  et  $W_2 = \frac{V - \bar{V}}{2i} = \text{Im}(V) \in \mathbb{R}^2$ . On a alors  
**(1):**  $BV = (2 + 3i)V$  et, en conjuguant, **(2):**  $B\bar{V} = (2 - 3i)\bar{V}$ .

En ajoutant **(1)** et **(2)**, on obtient  $BW_1 = 2W_1 - 3W_2$ . En retranchant **(1)** et **(2)**, on obtient  $BW_2 = 3W_1 + 2W_2$ .

En admettant que la famille  $\mathcal{B} = (W_1, W_2)$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  (*tout ceci sera plus détaillé dans la question suivante, qui est une généralisation*), on voit que l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à la matrice  $B$  est représenté, dans la base  $\mathcal{B}$ , par la matrice  $M(2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ . Donc  $B = Q \cdot M(2, 3) \cdot Q^{-1}$ , où  $Q$  est la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathbb{R}^2$  à la base  $\mathcal{B}$ .

Dans cet exemple, on peut expliciter, en choisissant par exemple  $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + 3i \end{pmatrix}$ , d'où  
 $W_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ , enfin  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Comme en **Q2.**, on a  $\text{Sp}(M) = \{\mu, \bar{\mu}\}$ , la matrice  $M$  a deux valeurs propres complexes distinctes, donc est semi-simple.

Si  $V \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  est un vecteur propre de  $M$  pour la valeur propre  $\mu$ , on a alors  
**(1):**  $MV = \mu V$  et, en conjuguant, **(2):**  $M\bar{V} = \bar{\mu}\bar{V}$ . On introduit de nouveau les vecteurs  
 $W_1 = \frac{V + \bar{V}}{2} = \text{Re}(V) \in \mathbb{R}^2$  et  $W_2 = \frac{V - \bar{V}}{2i} = \text{Im}(V) \in \mathbb{R}^2$ .

En ajoutant **(1)** et **(2)**, on obtient

$$MW_1 = M \frac{V + \bar{V}}{2} = \frac{\mu V + \bar{\mu}\bar{V}}{2} = \frac{(a + ib)V + (a - ib)\bar{V}}{2} = aW_1 - bW_2.$$

En retranchant **(1)** et **(2)**, on obtient

$$MW_2 = M \frac{V - \bar{V}}{2i} = \frac{\mu V - \bar{\mu}\bar{V}}{2i} = \frac{(a + ib)V - (a - ib)\bar{V}}{2i} = bW_1 + aW_2.$$

La famille  $\mathcal{B} = (W_1, W_2)$  est libre dans  $\mathbb{R}^2$ : en effet, la famille  $(V, \bar{V})$  est libre dans  $\mathbb{C}^2$  puisque l'on a deux vecteurs propres de  $M$  associés à des valeurs propres distinctes  $\mu$  et  $\bar{\mu}$ . Supposons alors  $\alpha W_1 + \beta W_2 = 0$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  réels, cette relation se transforme en  $(\alpha - i\beta)V + (\alpha + i\beta)\bar{V} = 0$ , on doit donc avoir en particulier  $\alpha + i\beta = 0$ , d'où  $\alpha = \beta = 0$ .

Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , dans laquelle l'endomorphisme  $u$  canoniquement associé à la matrice  $M$  est représenté par la matrice  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $M$  est semblable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  à cette matrice, plus précisément  $M = Q \cdot M(a, b) \cdot Q^{-1}$ , où  $Q$  est la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathbb{R}^2$  à la base  $\mathcal{B}$ .

- Si la condition **ii)** est satisfaite, alors  $M$  admet deux valeurs propres complexes distinctes, donc est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , donc elle est semi-simple. Il est par ailleurs immédiat que, si la condition **i)** est satisfaite, alors  $M$  est encore semi-simple.

- Réciproquement, supposons  $M$  semi-simple, alors  $M$  est semblable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  à une matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ . Si l'une des valeurs propres  $\lambda$  ou  $\mu$  est réelle, alors l'autre l'est aussi car  $\lambda + \mu = \text{Tr}(D) = \text{Tr}(M) \in \mathbb{R}$  et, dans ce cas, la matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  puisque, soit elle est scalaire, soit elle admet deux valeurs propres réelles distinctes. Si  $\lambda \notin \mathbb{R}$ , on sait alors que  $\bar{\lambda}$  doit aussi être valeur propre de  $M$  puisque  $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$ , donc  $\mu = \bar{\lambda}$  et  $M$  admet bien deux valeurs propres complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.
5. Une matrice semblable à une matrice diagonalisable étant elle-même diagonalisable, il suffit de montrer que toute matrice presque diagonale est semi-simple. Reprenons donc la matrice presque diagonale  $M = \text{diag}(D, M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q))$  introduite par l'énoncé. Pour tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , le bloc  $M(a_j, b_j)$  a pour polynôme caractéristique  $(X - a_j)^2 + b_j^2$ , donc admet deux valeurs propres complexes conjuguées (distinctes)  $\mu_j = a_j + ib_j$  et  $\bar{\mu}_j = a_j - ib_j$ . Il existe donc  $Q_j \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $M(a_j, b_j) = Q_j \Delta_j Q_j^{-1}$  où  $\Delta_j = \text{diag}(\mu_j, \bar{\mu}_j)$ . Par un calcul en blocs, on obtient alors  $M = Q \Delta Q^{-1}$  avec  $\Delta = \text{diag}(D, \Delta_1, \dots, \Delta_q)$  et  $Q = \text{diag}(I_p, Q_1, \dots, Q_q)$ . La matrice  $M$  est donc diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , i.e. semi-simple.
6. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres réelles de  $N$  (non nécessairement distinctes, donc chacune comptée avec sa multiplicité), puis  $\mu_1, \dots, \mu_q$  les valeurs propres de  $N$  ayant une partie imaginaire strictement positive (aussi avec multiplicité). Comme  $\chi_N \in \mathbb{R}[X]$ , on retrouve  $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_q$  comme valeurs propres de  $N$ . Comme  $\chi_N$  est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ , on a  $p + 2q = n$ .

$$\text{Ainsi } \chi_N = \left[ \prod_{j=1}^p (X - \lambda_j) \right] \left[ \prod_{k=1}^q (X - \mu_k)(X - \bar{\mu}_k) \right].$$

Si  $N$  est supposée semi-simple, alors  $N$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à la matrice diagonale  $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_q, \bar{\mu}_q)$ . Notons  $(U_1, \dots, U_p, V_1, V_1', V_2, V_2', \dots, V_q, V_q')$  une base de  $\mathbb{C}^n$  dans laquelle l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $N$  admet pour matrice  $\Delta$ . On a alors  $\mathbb{C}^n = E^0 \oplus E^+ \oplus E^-$ , avec

$$E^0 = \text{Vect}(U_1, \dots, U_p) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(u) \\ \text{Im}(\lambda) = 0}} E_\lambda(u) \quad , \quad E^+ = \text{Vect}(V_1, \dots, V_q) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(u) \\ \text{Im}(\lambda) > 0}} E_\lambda(u)$$

et

$$E^- = \text{Vect}(V_1', \dots, V_q') = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(u) \\ \text{Im}(\lambda) < 0}} E_\lambda(u) .$$

Les vecteurs  $U_1, \dots, U_p$  peuvent être choisis dans  $\mathbb{R}^n$ , ce que nous supposons désormais: en effet, à chaque valeur propre réelle  $\lambda$  est associé un sous-espace propre dont la dimension est la même, que l'on travaille dans  $\mathbb{C}^n$  ou dans  $\mathbb{R}^n$ , le rang de la matrice  $N - \lambda I_n$  étant le même sur le corps  $\mathbb{R}$  ou sur le corps  $\mathbb{C}$ .

D'autre part, la famille  $(\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_q)$  est aussi une base de  $E^-$ , sa liberté résultant immédiatement de celle de la famille  $(V_1, \dots, V_q)$ , la relation  $N\bar{V}_k = \bar{\mu}_k \bar{V}_k$  résultant trivialement de  $NV_k = \mu_k V_k$ , et le cardinal étant le même que celui de  $(V_1', \dots, V_q')$ .

Ainsi la famille  $(U_1, \dots, U_p, V_1, \bar{V}_1, V_2, \bar{V}_2, \dots, V_q, \bar{V}_q)$  est aussi une base de  $\mathbb{C}^n$  (par concaténation de bases de  $E^0$ ,  $E^+$  et  $E^-$ ) dans laquelle l'endomorphisme  $u$  est représenté

par la même matrice diagonale  $\Delta$ .

Posons enfin  $W_k = \operatorname{Re}(V_k) = \frac{V_k + \overline{V_k}}{2}$  et  $W'_k = \operatorname{Im}(V_k) = \frac{V_k - \overline{V_k}}{2i}$  pour  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ .

Il est immédiat de vérifier que la famille  $\mathcal{B} = (U_1, \dots, U_p, W_1, W'_1, W_2, W'_2, \dots, W_q, W'_q)$  est libre dans  $\mathbb{R}^n$ , donc est une base de  $\mathbb{R}^n$  (et aussi de  $\mathbb{C}^n$ ) puisque  $p + 2q = n$ , et que l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $N$  (ou bien, par restriction, l'endomorphisme  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $N$ ) a pour matrice dans cette base la matrice presque diagonale  $M$  proposée par l'énoncé, en posant  $\mu_k = a_k + ib_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$  (ce sont les mêmes calculs que dans la question 3.). Donc  $N$  est semblable, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , à une matrice presque diagonale.

*Remarque.* Il est plus facile de montrer que  $N$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à la matrice presque diagonale  $M$ , mais il faudrait ensuite utiliser le fait (en le démontrant, exercice classique, mais je pense que ce n'est pas ce qui est attendu) que deux matrices réelles qui sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sont aussi semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## PARTIE 2. Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

7. Si on avait  $v_k \in F$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le sous-espace  $F$  contiendrait une famille génératrice de  $E$ , donc  $F = E$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Il existe donc  $k$  tel que  $v_k \notin F$ .

Ensuite,  $F \cap \operatorname{Vect}(v_k)$  est un sous-espace de la droite vectorielle  $\operatorname{Vect}(v_k)$ , il est donc égal, soit à  $\{0_E\}$ , soit à  $\operatorname{Vect}(v_k)$ , le deuxième cas étant exclu puisque  $v_k \notin F$ , donc  $F \cap \operatorname{Vect}(v_k) = \{0_E\}$ , i.e. les deux s.e.v.  $F$  et  $\operatorname{Vect}(v_k)$  sont en somme directe.

8. L'ensemble  $\mathcal{L}$  est une partie de  $\mathbb{N}$ , **non vide** puisqu'il existe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\operatorname{Vect}(v_k) \in \mathcal{A}$  donc  $1 \in \mathcal{L}$ , et **majorée** par  $n$ . Donc  $\mathcal{L}$  admet un plus grand élément

$$r = \max(\mathcal{L}) = \max_{H \in \mathcal{A}} \dim(H).$$

*On a utilisé le fait que toute droite vectorielle engendrée par un vecteur propre de  $u$  est stable par  $u$  pour affirmer que  $\operatorname{Vect}(v_k) \in \mathcal{A}$ .*

9. Soit  $G \in \mathcal{A}$  tel que  $\dim(G) = r$ . Alors  $G$  est stable par  $u$  et  $F \cap G = \{0_E\}$ . Posons alors  $S = F \oplus G$  et montrons que  $S = E$ , ce qui résoudra le problème.

Si ce n'était pas le cas, il existerait un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $v_k \notin S$  et on aurait alors  $S \cap \operatorname{Vect}(v_k) = \{0_E\}$  d'après **Q7**. En posant  $G' = G \oplus \operatorname{Vect}(v_k)$ , il est clair que cette somme est directe aussi puisque  $G \subset S$ , donc  $\dim(G') = r + 1 > r$ . Mais  $G'$  est stable par  $u$  puisque  $G$  et  $\operatorname{Vect}(v_k)$  le sont. Enfin,  $F \cap G' = \{0_E\}$ : en effet, si  $x \in F \cap G' = F \cap (G + \operatorname{Vect}(v_k))$ , alors  $x \in F$  et  $x = y + \lambda v_k$  avec  $y \in G$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , donc  $x - y = \lambda v_k \in (F + G) \cap \operatorname{Vect}(v_k) = S \cap \operatorname{Vect}(v_k) = \{0_E\}$ , donc  $x - y = 0_E$ , puis  $x = y \in F \cap G = \{0_E\}$ , finalement  $x = 0_E$ . On vient de prouver que  $G' \in \mathcal{A}$ , ce qui est contradictoire puisque  $\dim(G') > r = \max_{H \in \mathcal{A}} \dim(H)$ .

Donc  $G$  est un supplémentaire de  $F$  stable par  $u$ .

10. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on suppose que tout s.e.v. de  $E$  possède un supplémentaire stable par  $u$ . On va montrer que  $u$  est diagonalisable, c'est-à-dire que  $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$ .

Posons donc  $S = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$  et supposons  $S \neq E$ , donc  $\dim(S) \leq n - 1$ . Il existe

alors un hyperplan  $H$  de  $E$  contenant  $S$ . Alors  $H$  admet, par hypothèse, un supplémentaire stable par  $u$ , ce supplémentaire est alors une droite vectorielle  $D = \text{Vect}(v)$ . Comme  $D$  est stable par  $u$ , on déduit que  $v$  est un vecteur propre de  $u$  donc  $v \in S$ , ce qui est absurde puisque d'une part  $v \neq 0_E$ , et d'autre part  $v \in S \cap D \subset H \cap D = \{0_E\}$ .

On a donc  $S = E$ , ce qui montre que  $u$  est diagonalisable.

Des questions 9. et 10., en traduisant matriciellement, on déduit qu'une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  admet un supplémentaire stable par l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $M$ .

### PARTIE 3. Polynômes de Hurwitz

11. Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$  à coefficients strictement positifs, de degré  $d$ , soit  $\alpha$  un réel.

Si  $\alpha \geq 0$ , alors  $P(\alpha) = \sum_{k=0}^d a_k \alpha^k \geq a_0 > 0$  donc  $\alpha$  ne peut être racine de  $P$ . Les racines réelles de  $P$  sont donc strictement négatives.

12. Notons  $\mathcal{Z}(P)$  l'ensemble des racines complexes d'un polynôme  $P$ .

Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme de Hurwitz, alors  $\mathcal{Z}(P) \subset \text{Re}^-$ . Si  $D \in \mathbb{R}[X]$  est un diviseur de  $P$ , alors  $\mathcal{Z}(D) \subset \mathcal{Z}(P)$ , donc a fortiori  $\mathcal{Z}(D) \subset \text{Re}^-$ , donc  $D$  est aussi un polynôme de Hurwitz.

13. • Si  $\deg(P) = 1$ , alors  $P = aX + b$  avec  $a > 0$ . Sa seule racine est le réel  $-\frac{b}{a}$  donc, si  $P$  est un polynôme de Hurwitz,  $\text{Re}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a} < 0$ , donc  $b > 0$ , et  $P$  est bien à coefficients strictement positifs.

• Si  $\deg(P) = 2$ , alors  $P = aX^2 + bX + c$  avec  $a > 0$ , mais  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ , donc admet deux racines complexes conjuguées  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  avec  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , on a donc aussi  $P = a(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ . Si  $P$  est un polynôme de Hurwitz, alors  $\text{Re}(\alpha) < 0$ , puis

$$b = -a(\alpha + \bar{\alpha}) = -2a \text{Re}(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad c = a\alpha\bar{\alpha} = a|\alpha|^2 > 0,$$

le polynôme  $P$  est encore à coefficients strictement positifs.

14. La réponse est oui. En effet, on a  $Q = (X - 2z_1)(X - 2z_2)(X - z_1 - z_2)^2$ , on remarque que son coefficient constant est le produit de ses racines  $4z_1z_2(z_1 + z_2)^2$ , et que son coefficient de  $X^3$  est  $-4(z_1 + z_2)$  puisque c'est l'opposé de la somme de ses racines.

Le polynôme  $P = (X - z_1)(X - z_2)$  étant dans  $\mathbb{R}[X]$ , deux cas se présentent:

- les deux racines  $z_1$  et  $z_2$  sont réelles (distinctes ou non): la stricte positivité des coefficients de  $Q$  entraîne alors  $\begin{cases} z_1z_2 > 0 \\ z_1 + z_2 < 0 \end{cases}$ , donc les réels  $z_1$  et  $z_2$  sont strictement négatifs, et  $P$  est bien un polynôme de Hurwitz ;

- les racines  $z_1$  et  $z_2$  sont des nombres complexes conjugués (non réels): de  $-4(z_1 + z_2) > 0$ , on déduit que  $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) < 0$ , donc  $P$  est encore un polynôme de Hurwitz.

15. Soient  $p$  et  $q$  les degrés respectifs de  $A$  et  $B$ , alors  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  et  $B = \sum_{l=0}^q b_l X^l$ , les

coefficients  $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q$  étant strictement positifs. On a alors  $AB = \sum_{n=0}^{p+q} c_n X^n$ ,

avec  $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l$  (en posant  $a_k = 0$  si  $k > p$ , et  $b_l = 0$  si  $l > q$ ).

Ainsi, pour  $n \in \llbracket 0, p+q \rrbracket$ ,  $c_n$  est une somme de réels positifs ou nuls, au moins un terme étant strictement positif, donc  $c_n > 0$ , et le polynôme  $AB$  est à coefficients strictement positifs.

16. Soient  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes tels que les polynômes  $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$  et

$Q = \prod_{1 \leq k, l \leq n} (X - z_k - z_l)$  soient dans  $\mathbb{R}[X]$ . Alors les racines de  $P$  sont, soit réelles,

soit complexes non réelles se regroupant par paires avec leurs conjugués, rebaptisons-les  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  (pour les réelles) et  $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_q, \bar{\mu}_q$ , avec  $p + 2q = n$ .

• Si  $P$  est un polynôme de Hurwitz, alors  $\lambda_j < 0$  ( $1 \leq j \leq p$ ), et  $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$  ( $1 \leq k \leq q$ ), donc  $\mu_k + \bar{\mu}_k < 0$ , les polynômes  $X - \lambda_j$  et  $(X - \mu_k)(X - \bar{\mu}_k) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\mu_k)X + |\mu_k|^2$  sont alors à coefficients strictement positifs. Par produit, en utilisant **Q15.**, le polynôme  $P$  est aussi à coefficients strictement positifs.

Mais le même raisonnement s'applique alors au polynôme  $Q$  puisqu'il est réel, unitaire, et que ses racines, les  $z_k + z_l$  avec  $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , sont aussi dans  $\operatorname{Re}^-$ . Donc  $Q$  est aussi à coefficients strictement positifs.

• Supposons  $P$  et  $Q$  à coefficients strictement positifs. D'après **Q11.**, les racines réelles de  $P$  et de  $Q$  sont strictement négatives, donc  $\lambda_j < 0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  (racines réelles de  $P$ ) et  $\mu_k + \bar{\mu}_k < 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$  (ce sont des racines réelles de  $Q$ ), donc  $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$ . Toutes les racines de  $P$  ont alors une partie réelle strictement négative, et  $P$  est un polynôme de Hurwitz.

#### PARTIE 4. Système différentiel de matrice associée semi-simple

17. On a  $M = PTP^{-1}$  avec  $P = (p_{i,j}) \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ . Si  $X = (x_1, \dots, x_n)$  est solution du système  $(S)$ , alors  $X' = PTP^{-1}X$  puis  $P^{-1}X' = (P^{-1}X)' = T(P^{-1}X)$ , la fonction vectorielle  $Y = P^{-1}X = (y_1, \dots, y_n)$  est alors solution de  $(S^*)$ .

Donc  $X = PY$  avec  $Y$  solution de  $(S^*)$ , ce qui donne pour les coordonnées:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^n p_{i,j} y_j(t),$$

les fonctions coordonnées de  $X$  sont bien combinaisons linéaires des fonctions coordonnées de  $Y$ .

18. • Le système  $(S)$  :  $X' = MX$  se traduit par  $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = -bx + ay \end{cases}$ , on en déduit

$$x' + iy' = (ax + by) + i(-bx + ay) = (a - ib)(x + iy), \quad \text{soit} \quad z' = (a - ib)z.$$

Réciproquement, si  $z' = (a - ib)z$ , alors  $x' + iy' = (ax + by) + i(-bx + ay)$  et, en séparant parties réelle et imaginaire, on retrouve que  $X' = MX$ .

• L'équation  $z' = (a - ib)z$ , où  $z$  est une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ , se résout en  $z(t) = C e^{(a-ib)t}$ , où  $C = C_1 + iC_2$  est une constante complexe arbitraire ( $C_1$  et  $C_2$  réels). On a donc  $z(t) = (C_1 + iC_2) e^{at} (\cos(bt) - i \sin(bt))$ , puis en séparant parties réelle et imaginaire:

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) \\ y(t) = e^{at} (C_2 \cos(bt) - C_1 \sin(bt)) \end{cases}, \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

• On a  $B = QMQ^{-1}$  avec  $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  par exemple. Alors

$$X' = BX \iff Q^{-1}X' = MQ^{-1}X \iff Y' = MY \quad \text{en posant } Y = Q^{-1}X.$$

On résout d'abord le système  $Y' = MY$  en posant  $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . D'après les calculs exposés

ci-dessus, cela donne  $\begin{cases} u(t) = e^{2t} (C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)) \\ v(t) = e^{2t} (C_2 \cos(3t) - C_1 \sin(3t)) \end{cases}$ , avec  $C_1$  et  $C_2$  constantes

réelles arbitraires. On effectue enfin le produit matriciel  $X = QY$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , ainsi

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} (2C_1 \cos(3t) + 2C_2 \sin(3t)) \\ y(t) = e^{2t} ((3C_2 - C_1) \cos(3t) - (3C_1 + C_2) \sin(3t)) \end{cases}, \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

**19.** Si  $M$  est semi-simple, elle est semblable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  à une matrice presque diagonale  $T$ , qui est de la forme  $T_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  réels, ou  $T_2 = M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  avec  $a$  et  $b$  réels,  $b$  étant non nul. On a alors  $M = PTP^{-1}$  avec  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ , et les coordonnées des solutions de  $(S)$ :  $X' = MX$  tendent toutes vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si les coordonnées des solutions de  $(S^*)$ :  $Y' = TY$  tendent toutes vers 0 en  $+\infty$ , puisque les unes sont combinaisons linéaires des autres et réciproquement.

• Dans le premier cas  $T = T_1$ , on a  $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(T) = \{\lambda, \mu\}$ , et les solutions  $Y = (u, v)$  de  $(S^*)$  sont données par  $\begin{cases} u(t) = C_1 e^{\lambda t} \\ v(t) = C_2 e^{\mu t} \end{cases}$ , qui tendent toutes vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si  $\lambda < 0$  et  $\mu < 0$ .

• Dans le deuxième cas  $T = T_2$ , on a  $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(T) = \{a + ib, a - ib\}$ , et les solutions  $Y = (u, v)$  de  $(S^*)$  sont données par

$$\begin{cases} u(t) = e^{at} (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) \\ v(t) = e^{at} (C_2 \cos(bt) - C_1 \sin(bt)) \end{cases},$$

qui tendent toutes vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si  $a < 0$ .

**Bilan.** Pour  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  semi-simple, la CNS recherchée, pour que toutes les fonctions vectorielles solutions de  $(S)$  aient une limite nulle en  $+\infty$ , est que les parties réelles des

valeurs propres soient strictement négatives, ce que l'on peut traduire de façon équivalente par la condition  $\text{Sp}(M) \subset \text{Re}^-$ , ou encore par le fait que le polynôme caractéristique  $\chi_M$  est un polynôme de Hurwitz.

**20.** Soit  $\Phi$  une solution de  $(S^*)$ , i.e.  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable telle que  $\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi'(t) = T \cdot \Phi(t)$ .

Posons  $\varphi(t) = e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2 = e^{2\beta t} \langle \Phi(t), \Phi(t) \rangle$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Alors  $\varphi$  est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) &= 2\beta e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2 + 2 e^{2\beta t} \langle \Phi'(t), \Phi(t) \rangle \\ &= 2 e^{2\beta t} \left( \beta \|\Phi(t)\|^2 + \langle T \cdot \Phi(t), \Phi(t) \rangle \right) \\ &\leq 2 e^{2\beta t} \left( \beta \|\Phi(t)\|^2 - \beta \|\Phi(t)\|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi(t) \leq \varphi(0)$ , soit  $e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2 \leq \|\Phi(0)\|^2$ , soit encore  $e^{\beta t} \|\Phi(t)\| \leq \|\Phi(0)\|$ , donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \|\Phi(t)\| \leq e^{-\beta t} \|\Phi(0)\|,$$

ce qui est la condition  $A_3$  avec  $k = 1$  (et  $\alpha = \beta$ ).

**21.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semi-simple.

- L'implication  $A_3 \implies A_2$  est triviale.
- Montrons  $A_2 \implies A_1$ .

Comme en **Q19.**,  $M = PTP^{-1}$  avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , et  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  presque diagonale et, si toutes les solutions  $\Phi$  de  $(S)$  tendent vers  $0_{\mathbb{R}^n}$  en  $+\infty$ , alors toutes les solutions  $\Psi$  de  $(S^*)$ :  $Y' = TY$  (qui sont de la forme  $\Psi = P^{-1} \cdot \Phi$ , et dont les coordonnées sont des combinaisons linéaires des coordonnées de  $\Phi$ ) tendent aussi vers  $0_{\mathbb{R}^n}$  en  $+\infty$ . En posant  $T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q))$  avec les  $\lambda_j$  et les  $a_k$  réels et les  $b_k$  réels tous non nuls, on montre comme en **Q19.** que cela entraîne que  $\lambda_j < 0$  ( $1 \leq j \leq p$ ) et  $a_k < 0$  ( $1 \leq k \leq q$ ), autrement dit  $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(T) \subset \text{Re}^-$ , donc  $\chi_M = \chi_T$  est un polynôme de Hurwitz.

- Montrons enfin que  $A_1 \implies A_3$ .

On a toujours  $M = PTP^{-1}$  avec  $T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q))$  presque diagonale et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\chi_M = \chi_T$  est un polynôme de Hurwitz, ce qui signifie que les  $\lambda_j$  et les  $a_k$  sont des réels strictement négatifs. Soit alors  $M = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_p, a_1, \dots, a_q\} < 0$ , posons  $\alpha = -M > 0$ . Soit  $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . On calcule  $TY = (\lambda_1 y_1, \dots, \lambda_p y_p, a_1 y_{p+1} + b_1 y_{p+2}, -b_1 y_{p+1} + a_1 y_{p+2}, \dots)$ , puis

$$\begin{aligned} \langle TY, Y \rangle &= \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_p y_p^2 + a_1 (y_{p+1}^2 + y_{p+2}^2) + \dots + a_q (y_{n-1}^2 + y_n^2) \\ &\leq -\alpha (y_1^2 + \dots + y_n^2) = -\alpha \|Y\|^2. \end{aligned}$$

La matrice  $T$  vérifie la condition (C). D'après **Q20.**, toute solution  $\Psi$  de  $(S^*)$ :  $Y' = TY$  vérifie  $\|\Psi(t)\| \leq e^{-\alpha t} \|\Psi(0)\|$  pour  $t \geq 0$ .

Les applications  $X \mapsto PX$  et  $X \mapsto P^{-1}X$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  (dimension finie), donc sont lipschitziennes, il existe donc  $C > 0$  et  $C' > 0$  tels que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad \|PX\| \leq C \|X\| \quad \text{et} \quad \|P^{-1}X\| \leq C' \|X\|.$$

Si  $\Phi$  est une solution de  $(S)$ , on a  $\Phi = P \cdot \Psi$ , où  $\Psi$  est une solution de  $(S^*)$ , alors pour  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)\| &= \|P \cdot \Psi(t)\| \leq C \|\Psi(t)\| \\ &\leq C e^{-\alpha t} \|\Psi(0)\| = C e^{-\alpha t} \|P^{-1} \cdot \Phi(0)\| \\ &\leq CC' e^{-\alpha t} \|\Phi(0)\| .\end{aligned}$$

La condition  $A_3$  est donc satisfaite.

On a ainsi prouvé l'équivalence des assertions  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ .