

## Exercice n°1

1. (a) On a  $J^2 = nJ$

(b) On a  $A = J + I_n$  donc  $(A - I_n)^2 = n(A - I_n)$

ainsi Le polynôme  $X^2 - (2+n)X + 1 + n$  est un polynôme annulateur de  $A$  du second degré

(c) On a donc  $A(A - (2+n)I_n) = -(n+1)I_n$  donc  $A$  inversible

et  $A^{-1} = \frac{-1}{n+1}(A - (2+n)I_n) = \frac{-1}{n+1}J + I_n$

$$\text{donc } A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & n \end{pmatrix}$$

2. (a) La matrice  $A$  est symétrique réelle ; ainsi le théorème spectral nous fournit

une matrice  $Q \in O_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = QDQ^{-1}$

(b) On sait que les valeurs propres de  $A$  sont racines du polynôme annulateur trouvé en en 1(b).

Ce polynôme admet 1 et  $n+1$  comme racines (1 évidente puis somme et racine)

Notons  $m$  et  $m'$  les multiplicités respectives de 1 et  $n+1$  en tant que valeurs propres de  $A$

On a  $m + m' = n$  car  $A$  est diagonalisable de plus on a  $(D) = (A)$

donc  $m \times 1 + m' \times (n+1) = 2n$  et  $m = n - m'$

ainsi  $n + nm' = 2n$  donc  $m' = 1$  et  $m = n - 1$

$$\text{on peut prendre } D = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Montrons  $\begin{cases} (i) & \mathcal{E} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ évident} \\ (ii) & \mathcal{E} \neq \emptyset \text{ vrai en prenant la matrice nulle} \\ (iii) & \mathcal{E} \text{ stable par combinaison linéaire} \end{cases}$

Pour (iii) : Soit  $U$  et  $V \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a  ${}^tUA = AU$  et  ${}^tVA = AV$

par combinaison linéaire on obtient :  ${}^t(\lambda U + V)A = A(\lambda U + V)$

donc  $\lambda U + V \in \mathcal{E}$  ce qui permet de conclure.

On a montré  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(b) Soit  $U \in \mathcal{E}$ . On a  $V = {}^tQUQ$ .

D'après 2(a), on a  $Q^{-1} = {}^tQ$  car  $Q$  orthogonale et  $D = Q^{-1}AQ$

ainsi on a  ${}^tVD = Q^{-1}{}^tUQQ^{-1}AQ = Q^{-1}{}^tUAQ$

et  $DV = Q^{-1}AQQ^{-1}UQ = Q^{-1}AUQ$

comme  ${}^tUA = AU$ , on peut conclure que  ${}^tVD = DV$

- (c) On considère l'application bien  $\psi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ U & \longmapsto {}^tQUQ \end{cases}$  est linéaire car le produit matriciel est bilinéaire.

De plus cette application admet comme bijection réciproque  $V \mapsto {}^t(Q^{-1})VQ^{-1}$  donc elle est bijective

D'après la question précédente,  $\Psi(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$  et de façon analogue on a  $\Psi^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$

donc  $\Psi(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$  et  $\Psi$  est un automorphisme ainsi  $\boxed{\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F}}$

- (d) On cherche alors la dimension de l'espace  $\mathcal{F}$ . Soit  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{On a } V \in \mathcal{F} &\iff {}^tVD = DV \\ &\iff {}^t(DV) = DV \text{ car } D \text{ est symétrique} \\ &\iff DV \in S_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

donc  $\dim \mathcal{F} = \dim S_n(\mathbb{R})$  car  $U \mapsto DU$  est un isomorphisme ( $D$  inversible)

$$\text{or } \dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ainsi } \boxed{\dim \mathcal{E} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

4. (a) Soit  $x, y$  et  $z \in \mathbb{R}^n$  de coordonnées respectives :  $X, Y$  et  $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Montrons que : } \begin{cases} (i) & \varphi(x, y) \in \mathbb{R} \text{ (forme)} \\ (ii) & \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z) \text{ (linéarité à gauche)} \\ (iii) & \varphi(x, y) = \varphi(y, x) \text{ (symétrique)} \\ (iv) & \text{(linéarité à droite)} \\ (v) & \varphi(x, x) \geq 0 \text{ (positive)} \\ (vi) & \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0 \text{ (définie)} \end{cases}$$

pour (i) oui en utilisant l'identification  $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

pour (ii) On a  $\varphi(\lambda x + y, z) = {}^t(\lambda X + Y)AZ = \lambda {}^tXAZ + {}^tYAZ = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

pour (iii) On a  $\varphi(x, y) = {}^t\varphi(x, y)$  car  $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$

donc  $\varphi(x, y) = {}^t({}^tXAY) = {}^tY^tAX = {}^tYAX$  car  $A$  est symétrique.

d'où  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

pour (iv) conséquence de (iii) et (ii)

pour (v) On a  $\varphi(x, x) = {}^tXQD^tQX = {}^t(QX)D(QX)$

$$\text{On note } QX = X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donc  $\varphi(x, x) = {}^tX'DX' = nx_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

ainsi  $\varphi(x, x) \geq 0$

pour (vi) On suppose que  $\varphi(x, x) = 0$  avec les notations précédentes on a  $nx_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$

comme les termes de la somme sont tous positifs :  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

donc  $X' = 0$  d'où  $QX = 0$

comme  $Q$  est inversible on a  $X = 0$

ainsi  $x = 0$

Ainsi on a bien montré que  $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire}}$

- (b) Par définition de  $u$ ,  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Montrons  $\varphi(u(x), y) = \varphi(x, u(y))$ .

On note  $X$  et  $Y$  comme précédemment.

On a  $\varphi(u(x), y) = {}^t(UX)AY = {}^tX^tUAY = {}^tXAUY = \varphi(x, u(y))$

On a bien montré que  $\boxed{\text{l'application linéaire } u \text{ est symétrique pour le produit scalaire } \varphi}$

(c) Soit  $U \in \mathcal{E}$ . On lui associe  $u$  comme en (a)

Comme  $u$  est un endomorphisme symétrique pour  $\varphi$ , il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  pour  $\varphi$  dans la quelle  $u$  admet une matrice diagonale  $\Delta$ .

On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$

Soit  $B$  la matrice de passage de la matrice canonique de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ , on a  $B^{-1}UB = \Delta$  donc  $U = B\Delta B^{-1}$ .

On note avec des majuscules les colonnes comme c'est l'usage dans l'énoncé.

Pour  $i$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $E'_i = BE_i$  car  $B = (E'_1 | E'_2 | \dots | E'_n)$  (écriture en colonnes)

et en utilisant le symbole de Kronecker et comme  $\mathcal{B}'$  orthonormée pour  $\varphi$

on obtient :  $\delta_{i,j} = \varphi(e'_i, e'_j) = {}^t(BE_i)A(BE_j) = {}^tE_i({}^tBAB)E_j$

comme ceci est vrai pour tout  $(i, j)$  et que pour  $M = (m_{i,j})$  on a  $m_{i,j} = {}^tE_iME_j$

on a bien montré que  $\begin{cases} U = B\Delta B^{-1} \\ {}^tBAB = I_n \end{cases}$

### Exercice n°2

1. On a  $P_{n+1}(X) = (-1)^{n+1} \det(A_{n+1} - XI_{n+1}) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 - X & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 - X & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} - X & b_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n - X & b_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & a_{n+1} - X \end{vmatrix}$

On développe ce déterminant par rapport à la dernière colonne puis par rapport à la dernière ligne celui où figure encore  $b_n$

On obtient  $P_{n+1}(X) = (-1)^{n+1} ((a_{n+1} - X) \det(A_n - XI_n) - b_n^2 \det(A_{n-1} - XI_{n-1}))$

Ce qui donne :  $\boxed{P_{n+1}(X) = (X - a_{n+1})P_n(X) - b_n^2 P_{n-1}(X)}$  car  $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$

2. (a) D'après le théorème spectral :  $\boxed{\text{La matrice } A_n \text{ est diagonalisable}}$  car symétrique réelle

(b)  $\boxed{\text{Le déterminant de la matrice extraite vaut } (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} b_i}$  (matrice triangulaire inférieure)

(c) Soit  $\lambda \in Sp(A_n)$ . La matrice  $\lambda I_n - A$  est non inversible.

donc  $\text{rg}(\lambda I_n - A_n) < n$  ainsi  $\text{rg}(\lambda I_n - A_n) \leq n - 1$

De plus de  $\lambda I_n - A$ , on a extrait une matrice carrée de taille  $(n-1)$  de déterminant non nul en (b)

Cette matrice extraite est donc de rang  $n - 1$

En rajoutant une colonne puis une ligne on obtient  $\text{rg}(\lambda I_n - A_n) \geq n - 1$

Ce qui permet de conclure  $\boxed{\text{rg}(\lambda I_n - A_n) = n - 1}$

(d) Comme  $A_n$  est diagonalisable, on a  $P_n(X) = \prod_{\lambda \in Sp(A_n)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$

où  $m_\lambda$  est la dimension de  $E_\lambda(A_n)$  sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Or  $E_\lambda(A_n) = \ker(A_n - \lambda I_n)$  et d'après le théorème du rang  $\dim \ker(A - \lambda I_n) + \text{rg}(\lambda I_n - A_n) = n$

donc soit  $\lambda \in Sp(A_n)$ , on a  $m_\lambda + n - 1 = n$

Ainsi  $P_n(X) = \prod_{\lambda \in Sp(A_n)} (X - \lambda)$  or  $\deg P_n = n$

donc  $\boxed{\text{le polynôme caractéristique } P_n(X) \text{ admet } n \text{ racines distinctes}}$

3. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $\Delta_n(x) = P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)$ .

D'après 1 : on a  $P_{n+1}(x) = (X - a_{n+1})P_n(X) - b_n^2 P_{n-1}(X)$

donc  $P'_{n+1}(x) = P_n(X) + (X - a_{n+1})P'_n(X) - b_n^2 P'_{n-1}(X)$

d'où  $\Delta_n(x) = (P_n(X) + (X - a_{n+1})P'_n(X) - b_n^2 P'_{n-1}(X))P_n(x) - ((X - a_{n+1})P_n(X) - b_n^2 P_{n-1}(X))P'_n(x)$

ainsi  $\Delta_n(x) = P_n^2(X) + (X - a_{n+1})P'_n(X)P_n(x) - b_n^2 P_n(x)P'_{n-1}(X) - (X - a_{n+1})P'_n(x)P_n(X) + b_n^2 P_{n-1}(X)P'_n(x)$

donc  $\Delta_n(x) = P_n^2(X) + b_n^2(P_{n-1}(X)P'_n(x) - P_n(x)P'_{n-1}(X))$

on a bien  $\boxed{\Delta_n(x) = P_n^2(X) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x)}$

(b) On a  $P_1(X) = X - a_1$  et  $P_2(X) = (X - a_1)(X - a_2) - b_1^2$  donc  $P'_1(X) = 1$  et  $P'_2(X) = 2X - a_1 - a_2$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $\Delta_1(x) = (2x - a_1 - a_2)(x - a_1) - 1((x - a_1)(x - a_2) - b_1^2) = (x - a_1)^2 + b_1^2$

Comme  $b_1 \neq 0$ , on a bien  $\boxed{\Delta_1(x) > 0}$

Puis par récurrence immédiate sur  $n$  : on montre :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \Delta_n(x) > 0}$

4. étape 1 On note  $f : x \mapsto \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus Sp(A_n)$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus Sp(A_n)$  et  $f' : x \mapsto \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)}{P_n^2(x)} = \frac{\Delta_n(x)}{P_n^2(x)}$

Ordonnons les valeurs propres de  $A_n$  (zéros de  $P_n$ ) :  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ .

On suppose  $n \geq 2$ . (sinon il n'y a rien à faire)

Soit  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

On a  $\forall x \in ]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ ,  $f'(x) > 0$ .

donc  $f$  est strictement croissante sur  $] \lambda_i, \lambda_{i+1}[$ .

étape 2 Montrons  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P_{n+1}(\lambda_k) \neq 0$

Par l'absurde, si on avait  $P_{n+1}(\lambda_k) = 0$ , on aurait  $\Delta_n(\lambda_k) = 0$  car  $P_n(\lambda_k) = 0$

ce qui est en contradiction avec 3(b)

ainsi  $\lim_{t \rightarrow \lambda_i^+} |f(t)| = +\infty = \lim_{t \rightarrow \lambda_{i+1}^-} |f(t)|$

étape 3 Par l'absurde on suppose maintenant que  $P_{n+1}$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $] \lambda_i, \lambda_{i+1}[$ .

donc  $P_{n+1}$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $[ \lambda_i, \lambda_{i+1}[$

Ainsi  $f$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $] \lambda_i, \lambda_{i+1}[$  or  $f$  y est continue

donc  $f$  garde un signe strict constant sur l'intervalle  $[ \lambda_i, \lambda_{i+1}[$  par contraposition du théorème des valeurs intermédiaires

ainsi  $\lim_{t \rightarrow \lambda_i^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow \lambda_{i+1}^-} f(t) \in \{-\infty, +\infty\}$

ceci est contradictoire avec le fait que  $f$  soit strictement croissante sur  $] \lambda_i, \lambda_{i+1}[$

En conclusion  $\boxed{\text{l'application } x \mapsto P_{n+1}(x) \text{ s'annule entre deux zéros consécutifs de } P_n}$

## Exercice n°3

1. La fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Sur  $]0, 1]$  On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

donc la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est prolongeable par continuité en 0

donc intégrable sur  $[0, 1]$  d'où l'existence de  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

Sur  $[1, +\infty[$  Soit  $A > 1$

On effectue une intégration par parties avec des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[1, A]$  :

On obtient (1) :  $\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \left[ \frac{-\cos x}{x} \right]_1^A - \int_1^A \frac{+\cos x}{x^2} dx = \cos(1) - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx$

Or  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$  (2)

et la fonction  $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$  est continue sur  $[1, +\infty[$

et  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

Or la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  car  $2 > 1$

Par comparaison à une fonction positive  $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$

d'où l'existence de  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

Par passage à la limite dans (1) (avec (2)) on obtient l'existence de  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

En conclusion L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  existe

2. (a) Quand  $t \rightarrow 0$ , on a  $\alpha t \rightarrow 0$

donc  $\cos(\alpha t) = 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} + o(t^2)$

ainsi  $1 - \cos(\alpha t) = \frac{\alpha^2 t^2}{2} + o(t^2) \sim \frac{\alpha^2 t^2}{2}$  car  $\alpha \neq 0$

donc  $\frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \sim \frac{\alpha^2 t^2}{2t^2} 1$

donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} = \frac{1}{2}$

donc l'application  $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$  est prolongeable par continuité en 0

(b) L'application  $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$  ainsi prolongée est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Sur  $[1, +\infty[$  on a pour  $t \geq 1$ ,  $\left| \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \right| \leq \frac{1 + |\cos(\alpha t)|}{t^2} |e^{-itx}| \leq \frac{2}{t^2}$

Comme en 1., on obtient l'intégrabilité de  $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$  sur  $[1, +\infty[$

Sur  $] -\infty, -1]$  de façon analogue  $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$  est intégrable sur  $] -\infty, -1]$

Le prolongement par continuité de  $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$

3. (a) On a  $I \in \mathbb{C}$ .

$$\text{Et } \bar{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\left( \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \right)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{itx} dt$$

On effectue le changement de variable affine  $u = -t$ ;  $-du = dt$  ( $\mathcal{C}^1$ , bijectif, strictement décroissante)

$$\text{ainsi } \bar{I} = - \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1 - \cos(-\alpha u)}{(-u)^2} e^{-iux} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt = I$$

Ce qui prouve que  $I$  est réelle

(b) On effectue un changement de variable affine  $t = Bx$ ;  $\frac{dt}{B} = dx$  à partir d'une intégrale convergente

$$\text{Ainsi } \int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \int_{AB}^{+\infty} \frac{B^2 \cos(t)}{t^2} \frac{dt}{B} = B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

On effectue ensuite une intégration par parties (sous réserves d'existences) avec des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$

$$\text{ainsi } \int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = B \left[ -\frac{\cos(t)}{t} \right]_{t=AB}^{t \rightarrow +\infty} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{+\sin(t)}{t} dt$$

Comme l'intégrale de gauche existe bien ainsi que l'expression entre crochets

$$\text{on peut conclure à l'existence } \int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

(c) On suppose  $B > 0$ .

$$\text{Soit } A > 0. \text{ On a } \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_x^{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{A}$$

$$\text{donc } \int_A^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{1 - \cos(AB)}{A} + B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Par un calcul asymptotique comme en 2(a), on a  $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(AB)}{A} = 0$

$$\text{à l'aide de 1 on a } \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et donc par passage à la limite on obtient } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = B \frac{\pi}{2}$$

$$\text{si } B < 0, \text{ on a } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(-Bx)}{x^2} dx = -B \frac{\pi}{2}$$

$$\text{si } B = 0, \text{ on a } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = 0$$

$$\text{donc dans le cas général on a } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{|B|\pi}{2}$$

(d) Comme  $I$  est réelle, on a  $I = \Re(I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \cos(tx) dt$

$$\text{puis par parité } I = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx) - \cos(tx) \cos(\alpha t)}{t^2} dt$$

En utilisant la formule  $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$\text{on obtient } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cos(tx) - \cos(t(x+\alpha)) - \cos(t(x-\alpha))}{t^2} dt$$

$$\text{Pour utiliser : } \forall B \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bt)}{t^2} dt = \frac{|B|\pi}{2}$$

$$\text{on écrit } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(t(x+\alpha))) + (1 - \cos(t(x-\alpha))) - 2(1 - \cos(tx))}{t^2} dt$$

$$\text{donc } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt = \frac{|x+\alpha| + |x-\alpha| - 2|x|}{2} \pi$$

## Exercice n°4

1. On a  $1 - p = P(b' = 0 | b = 1)$  ;  $q = P(b' = 0 | b = 0)$  et  $1 - q = P(b' = 1 | b = 0)$

2.  $(b = 1)$  et  $(b = 0)$  forment un système complet d'évènements

donc  $P(b' = 1) = P(b' = 1 | b = 1)P(b = 1) + P(b' = 1 | b = 0)P(b = 0)$  donc  $P(b' = 1) = p\alpha + (1 - q)(1 - \alpha)$

3. Selon la formule de Bayes :  $P(b = 1 | b' = 1) = \frac{P(b' = 1 | b = 1)P(b = 1)}{P(b' = 1)}$  si  $P(b' = 1) \neq 0$

si on avait  $P(b' = 1) = 0$  on aurait  $p\alpha = (1 - q)(1 - \alpha) = 0$

On est obligé de supposer  $p > 0$  et  $0 < \alpha < 1$  vu le contexte.

Sachant que l'on a reçu le bit 1,

la probabilité qu'un 1 ai été envoyé est de  $P(b = 1 | b' = 1) = \frac{p\alpha}{p\alpha + (1 - q)(1 - \alpha)}$

4. Si un 1 est envoyé, les éventuels perturbations sont indépendantes les unes des autres a priori.

On note  $Y$  la variable aléatoire correspondant au nombre de 1 envoyés

de sorte que  $P(X = k | b = 1) = P(Y = k)$

On répète  $n$  fois de façon indépendante la même expérience de Bernoulli dont les deux issus sont

- 1 avec une probabilité de  $p$

- 0 avec une probabilité de  $(1 - p)$

$Y$  compte le nombre de 1

Par conséquent  $Y$  suit la loi de binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  ;  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

donc pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

En notant  $Z$  tel que  $P(X = k | b = 0) = P(Z = k)$  on a  $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, (1 - q))$

donc pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(Z = k) = \binom{n}{k} (1 - q)^k q^{n-k}$

Ensuite la formule des probabilités totales donne  $P(X = k) = P(Y = k)P(b = 1) + P(Z = k)P(b = 0)$

Ainsi  $\boxed{\text{pour } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ on a } P(X = k) = \binom{n}{k} (\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k})}$

Résultat conforme à 2. pour  $n = 1 = k$

5. On a l'espérance  $E(X) = \sum_{k=0}^n kP(X = k) = \alpha \sum_{k=0}^n kP(Y = k) + (1 - \alpha) \sum_{k=0}^n kP(Z = k)$

donc  $E(X) = \alpha E(Y) + (1 - \alpha)E(Z) = \alpha np + (1 - \alpha)n(1 - q)$  ( $Y$  et  $Z$  suivent des lois binomiales)

ainsi  $\boxed{E(X) = n(\alpha p + (1 - \alpha)(1 - q))}$

6. Si le bit envoyé est 1 ( c'est à dire  $b = 1$ ) alors si  $Y$  désigne le nombre de bits 1 reçus alors  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

la famille  $((X = j))_{0 \leq j \leq n}$  forme un système complet d'évènements

On peut encore appliquer la formule de Bayes

$P(b = 1 | X = k) = \frac{P(X = k | b = 1)P(b = 1)}{P(X = k)} = P(b = 1) \frac{P(Y = k)}{P(X = k)}$

ainsi  $P(b = 1 | X = k) = \alpha \frac{\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}{\binom{n}{k} (\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k})}$

donc  $\boxed{P(b = 1 | X = k) = \alpha \frac{p^k (1 - p)^{n-k}}{\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - q)^k q^{n-k}}}$

7. (a) L'hypothèse canal symétrique donne  $P(b = 1 | X = k) = \frac{\alpha p^k (1 - p)^{n-k}}{\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - p)^k p^{n-k}}$

donc  $P(b = 0 | X = k) = \frac{(1 - \alpha)(1 - p)^k p^{n-k}}{\alpha p^k (1 - p)^{n-k} + (1 - \alpha)(1 - p)^k p^{n-k}}$

donc  $P(b = 1|X = k) > P(b = 0|X = k) \iff \alpha p^k(1-p)^{n-k} > (1-\alpha)(1-p)^k p^{n-k}$

ainsi  $P(b = 1|X = k) > P(b = 0|X = k) \iff \left(\frac{p}{1-p}\right)^{2k} > \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \frac{1-\alpha}{\alpha}$

comme  $p > 1/2$  alors  $p/(1-p) > 1$  donc  $\ln(p) - \ln(1-p) > 0$

donc le 1 est le plus probable si et seulement si  $k > \frac{n(\ln(p) - \ln(1-p)) + \ln(1-\alpha) - \ln(\alpha)}{2(\ln(p) - \ln(1-p))}$

(b) Si  $\alpha = 1/2$  le 1 est le plus probable si et seulement si  $2k > n$  (résultat rassurant)

8. (a) Les hypothèses  $\alpha = 1/2$  et  $p = q$  donnent

$$P(b = 1|X = k) = \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{p^k(1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k}}$$

$$\text{donc } P(b = 0|X = k) = \frac{(1-p)^k p^{n-k}}{p^k(1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k}}$$

$$\text{et } P(X = k) = \frac{1}{2} \binom{n}{k} (p^k(1-p)^{n-k} + (1-p)^k p^{n-k})$$

La formule des probabilités totales donne

$$f(n) = \sum_{n/2 < k \leq n} P(b = 0|X = k)P(X = k) + \sum_{0 \leq k < n/2} P(b = 1|X = k)P(X = k)$$

(b) donc  $f(n) = \frac{1}{2} \sum_{n/2 < k \leq n} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k < n/2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(c) On fait comme vue ne classe : on calcule de façon récursive  $n \in \mathbb{N}^*$  étant donné, la liste des  $\binom{n}{k}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

```
def tab_bin(n):
    if n<2: return (n+1)*[1]
    else:
        coefs=tab_bin(n-1)
        coefs.append(1)
        for i in range(n-1,0,-1):
            coefs[i]+=coefs[i-1]
        return coefs
def binome(n,k):
    if k>n:
        return 0
    else:
        return tab_bin(n)[k]
```

(d) Là c'est classique, il est préférable de calculer avec la fonction précédente `tab_bin`.

```
p=0.95
def f(n):
    somme=0
    coefs=tab_bin(n)
    for k in range(n+1):
        if 2*k>n:
            somme+=coefs[k]*((1-p)**k)*(p**(n-k))
        if 2*k<n:
            somme+=coefs[k]*(p**k)*((1-p)**(n-k))
    return somme/2
```