

X-ENS PSI - 2013

un corrigé

Remarque préliminaire : dans le sujet, on demande de statuer sur la convergence d'intégrales. Quand les fonctions mises en jeu sont positives, une telle convergence équivaut à l'intégrabilité. On raisonnera donc souvent en terme d'intégrabilité sans revenir sur cet argument.

1.

a) Soit $x > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. La fonction $g_{m,x} : t \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a donc des problèmes aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

Au voisinage de 0 : $g_{m,x}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ (par croissances comparées et car $x > 0$) et $g_{m,x}$ est donc prolongeable par continuité en 0.

Au voisinage de l'infini : $t^2 g_{m,x}(t) = \exp(-t^2 - \frac{x}{t} - (m+2)\ln(t))$; le terme dans l'exponentielle équivaut à $-t^2$ et tend vers $+\infty$; par composition des limites, on a donc $g_{m,x}(t) = o(1/t^2)$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Finalement, $g_{m,x} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ et l'intégrale $T_m(x)$ existe.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. $g_m : t \mapsto t^m e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. Au voisinage de 0, $g_m(t) \sim t^m$ est intégrable ssi $m > -1$. On a donc

$$A =]-1, +\infty[$$

c) Une intégration par parties donne

$$\forall k \geq 2, \forall a > 0, \int_0^a t^k e^{-t^2} dt = \left[-\frac{t^{k-1}}{2} e^{-t^2} \right]_0^a + \frac{k-1}{2} \int_0^a t^{k-2} e^{-t^2} dt$$

On peut alors faire tendre a vers $+\infty$ pour obtenir

$$\forall k \geq 2, T_k(0) = \frac{k-1}{2} T_{k-2}(0)$$

Une récurrence donne alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, T_{2k}(0) = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} T_0(0) = \frac{(2k)!}{2^{2k+1} k!} \sqrt{\pi}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, T_{2k+1}(0) = k! T_1(0) = \frac{k!}{2}$$

2.

a) Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \geq 0, t \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\forall t > 0, x \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- $\forall a > 0, \forall x \in [0, a], \forall t > 0, |t^m e^{-(t^2+x/t)}| \leq t^m e^{-t^2}$ et comme $m \in A$, la question 1.b montre que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème s'applique et montre que

$$\forall m \in A, T_m \in C(\mathbb{R}_+)$$

b) On veut utiliser le même théorème.

- $\forall x > 0, t \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\forall t > 0, x \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\forall b > a > 0, \forall x \in [a, b], \forall t > 0, |t^m e^{-(t^2+x/t)}| \leq t^m e^{-(t^2+a/t)}$ et la question 1.a montre que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème s'applique et montre que

$$\forall m \in \mathbb{R}, T_m \in C(\mathbb{R}_+^*)$$

c) La relation de Chasles indique que

$$\forall x > 0, \forall m \in \mathbb{R}, T_m(x) = \int_0^1 t^m e^{-(t^2+x/t)} dt + \int_1^{+\infty} t^m e^{-(t^2+x/t)} dt$$

La seconde intégrale est positive (on intègre une fonction positive et les bornes sont dans le bon sens). On a aussi $\forall t \in]0, 1]$, $t^m e^{-(t^2+x/t)} \geq e^{-1} t^m e^{-x/t}$ et pour $x > 0$, le minorant est intégrable sur $]0, 1]$ (seul problème en 0 où la fonction est prolongable par continuité par la valeur 0). Il est donc licite d'écrire

$$\forall x > 0, \forall m \in \mathbb{R}, T_m(x) = \int_0^1 t^m e^{-1} e^{-x/t} dt = e^{-1} \int_0^1 t^m e^{-x/t} dt$$

$t \mapsto x/t$ réalise un C^1 difféomorphisme de $]0, 1[$ dans $]x, +\infty[$ (de classe C^1 , bijectif et à dérivée qui ne s'annule pas sur l'intervalle). On peut donc poser $u = x/t$ dans l'intégrale du membre de droite pour obtenir

$$\forall x > 0, \forall m \in \mathbb{R}, T_m(x) \geq e^{-1} x^{m+1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{m+2}} du$$

La fonction $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u^{m+2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, négligeable devant $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. En 0, elle équivaut à $1/u^{m+2}$ qui est intégrable au voisinage de 0 ssi $m+2 < 1$ i.e. $m < -1$. On distingue donc deux cas.

- Si $m < -1$, l'intégrale du membre de droite tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{m+2}} du$ quand $x \rightarrow 0^+$ et cette intégrale est > 0 (la fonction intégrée est positive et non nulle). Comme $x^{m+1} \rightarrow +\infty$, le membre de droite est donc de limite $+\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$.
- Si $m = -1$, l'intégrale du membre de droite tend vers $+\infty$ (la fonction est positive et non intégrable). Le membre de droite est donc encore de limite $+\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Par théorème de comparaison, on a donc

$$\forall m \leq -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} T_m(x) = +\infty$$

3.

a) Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0, t \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (question 1.a).
- $\forall t > 0, x \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $x \mapsto -t^{m-1} e^{-(t^2+x/t)}$.
- $\forall x > 0, t \mapsto -t^{m-1} e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall b > a > 0, \forall x \in [a, b], \forall t > 0, |t^{m-1} e^{-(t^2+x/t)}| \leq t^{m-1} e^{-(t^2+a/t)}$ et la question 1.a montre que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème indique que $T_m \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ avec

$$\forall x > 0, T'_m(x) = -T_{m-1}(x)$$

b) On montre alors par récurrence (sur p) que

$$\forall m \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*, T_m \in C^p(\mathbb{R}_+^*) \text{ et } T_m^{(p)} = (-1)^p T_{m-p}$$

ce qui montre, en particulier, que

$$\forall m \in \mathbb{R}, T_m \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$$

Comme T_k est une fonction positive, on déduit des formules obtenues que T'_m est négative et T''_m est positive. Ainsi,

$$\forall m \in \mathbb{R}, T_m \text{ décroît et est convexe sur } \mathbb{R}_+^*$$

- c) Pour pouvoir parler de dérivabilité à droite en 0, il faut qu'il y ait continuité en 0 (ou au moins une limite finie en 0^+). Il est donc nécessaire que $m \in A$. Sous cette hypothèse, on a une fonction $T_m \in C^0(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*)$ pour laquelle on peut utiliser le théorème de dérivabilité d'un prolongement (corollaire des accroissements finis). Distinguons deux cas.
- Si $m - 1 \in A$ alors $T'_m(x) = -T_{m-1}(x) \rightarrow -T_{m-1}(0)$ quand $x \rightarrow 0^+$ et T_m est donc dérivable en 0 avec $T'_m(0) = -T_{m-1}(0)$.
 - Si $m - 1 \notin A$ alors $T'_m(x) = -T_{m-1}(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ et T_m n'est donc pas dérivable en 0 mais a un graphe qui présente une demi-tangente verticale.
- Finalement, T_m est dérivable en 0 (et est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$) si et seulement si $m > 0$.

4.

- a) Soit $0 < A < B$; une intégration par parties donne

$$\int_A^B t^{m-1}(2t - x/t^2)e^{-(t^2+x/t)} dt = \left[-t^{m-1}e^{-(t^2+x/t)} \right]_A^B + (m-1) \int_A^B t^{m-2}e^{-(t^2+x/t)} dt$$

On fait tendre A vers 0^+ et B vers $+\infty$ pour en déduire (toutes les quantités existent) que

$$\forall x > 0, 2T_m(x) - xT_{m-3}(x) = (m-1)T_{m-2}(x)$$

- b) Il suffit alors d'utiliser les formules de **3.b** pour en déduire que

$$\forall x > 0, 2T_m(x) + xT_m'''(x) = (m-1)T''(x)$$

c)

5.

- a) $\phi : t \mapsto 1/t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée $u \mapsto -1/u^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. ϕ réalise donc un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans son image $\mathbb{R}_+^*$. Le changement de variable $u = \phi(t)$ est donc licite et donne

$$T_m(x) = \int_{+\infty}^0 u^{-m} e^{-(1/u^2+xu)} (-du/u^2) = \int_0^\infty u^{-m-2} e^{-(1/u^2+xu)} du$$

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$; $u \mapsto u^n e^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Une intégration par parties donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a > 0, \int_0^a u^{n+1} e^{-u} du = [-u^{n+1} e^{-u}]_0^a + (n+1) \int_0^a u^n e^{-u} du$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient $\int_0^a u^{n+1} e^{-u} du = (n+1) \int_0^a u^n e^{-u} du$ et une récurrence donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^\infty u^n e^{-u} du = n! \int_0^\infty u e^{-u} du = n!$$

- c) Il nous suffit de combiner les questions précédentes. En remarquant que $e^{-(1/u^2+u)} \leq e^{-u}$ pour $u > 0$ et que toutes les quantités écrites existent, on a

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, T_{-m}(1) = \int_0^\infty u^{m-2} e^{-(1/u^2+u)} du \leq \int_0^\infty u^{m-2} e^{-u} du = (m-2)!$$

- d) Fixons $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]-1, 1[$; on a

$$\forall n \geq k+2, \left| \frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1) x^n \right| \leq |x|^n \frac{(n-k-2)!}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n^{k+2}}$$

Le majorant est de limite nulle quand $n \rightarrow +\infty$ et la suite $(\frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1) x^n)_{n \geq 0}$ est donc bornée (puisque de limite nulle). Par définition du rayon de convergence, on a donc $R \geq 1$.

e) $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$ sont fixés. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a directement

$$T_k(1+x) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-(t^2+1/t)} \sum_{n \geq 0} (-x/t)^n dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{k-n} e^{-(t^2+1/t)} x^n dt$$

On veut intervertir somme et intégrale et on pose donc $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} t^{k-n} e^{-(t^2+1/t)} x^n$.

- Les f_n sont des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$, et sa somme est $t \mapsto t^m e^{-(t^2+1/t)} e^{-x/t}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On vient de voir que

$$\forall n \geq k+2, \int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{T_{k-n}(1)|x|^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n^{k+2}}$$

et le majorant est le terme général d'une série convergente (dominée par $1/n^2$ par croissances comparées et car $|x| < 1$).

Le théorème d'interversion pour les séries s'applique et donne

$$T_k(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1) x^n$$

6.

a) Soit $x > 0$. Notons $f_x : t \mapsto g(t, x)$. f_x est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t > 0, f'_x(t) = 2t - \frac{x}{t^2} \text{ et } f''_x(t) = 2 + \frac{2x}{t^3}$$

En particulier,

- f_x est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ (à dérivée seconde positive sur cet intervalle) ;
- en posant $M(x) = (x/2)^{1/3}$, f_x est strictement décroissante sur $]0, M(x)[$ puis strictement croissante sur $[M(x), +\infty[$ et admet donc un minimum atteint uniquement en $M(x)$ qui vaut

$$f_x(M(x)) = g(M(x), x) = x^{2/3}(2^{-2/3} + 2^{1/3}) = 3(x/2)^{2/3}$$

b) Soient $m \in \mathbb{R}^+$ et $x > 0$. La relation de Chasles donne

$$T_m(x) = \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} dt + \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-g(t,x)} dt$$

$M(x) \leq x^{1/3}$ découle immédiatement de $2^{1/3} \geq 1$ (et de $x \geq 0$) et, avec les variations étudiées en question précédente, $\forall t \geq x^{1/3}$, $g(t, x) \geq g(x^{1/3}, x) = 2x^{2/3}$. On écrit alors

$$\forall t \geq x^{1/3}, g(t, x) = \frac{19}{20}g(t, x) + \frac{1}{20}g(t, x) \geq \frac{19}{10}x^{2/3} + \frac{t^2}{20}$$

On en déduit que

$$\forall t \geq x^{1/3}, t^m e^{-g(t,x)} \leq t^m e^{-t^2/20} e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}}$$

Le membre de droite est intégrable au voisinage de $+\infty$ (et ici sur $[x^{1/3}, \infty[$). En intégrant et en utilisant la relation vue plus haut, on obtient

$$T_m(x) \leq \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} dt + e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} dt$$

Remarque : je n'utilise pas l'hypothèse $m \in \mathbb{R}^+$ et ce calcul, pour $x > 0$, me semble valable pour tout $m \in \mathbb{R}$.

- c) Soit $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{R}^+$. $t \mapsto t^{m-1}e^{-\varepsilon t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. C'est donc une fonction bornée sur $[1, +\infty[$ (la limite en $+\infty$ permet de se ramener à un segment où on utilise la continuité). Il existe donc $C > 0$ tel que

$$\forall t \geq 1, t^m \leq Cte^{\varepsilon t^2}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$; on peut trouver $\varepsilon' \in]0, \min(1/20, \varepsilon)[$ (puisque le minimum est > 0) et le début de la question donne un $C > 0$ tel que $\forall t \geq 1, t^m \leq Cte^{\varepsilon' t^2}$. On a alors

$$\forall x \geq 1, \forall t \geq x^{1/3}, t^m e^{-\frac{t^2}{20}} \leq Cte^{-t^2(\frac{1}{20}-\varepsilon')}$$

La fonction du membre de droite est intégrable au voisinage de $+\infty$ et en intégrant notre inégalité, on obtient

$$\forall x \geq 1, \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} dt \leq \frac{C}{2(\frac{1}{20}-\varepsilon')} e^{-x^{2/3}(1/20-\varepsilon')}$$

ce qui nous donne

$$\forall x \geq 1, e^{(1/20-\varepsilon)x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} dt \leq \frac{C}{2(\frac{1}{20}-\varepsilon')} e^{-x^{2/3}(\varepsilon-\varepsilon')} \leq \frac{C}{2(\frac{1}{20}-\varepsilon')}$$

Le majorant étant une constante, on obtient alors

$$e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} dt = O_{x \rightarrow \infty} \left(e^{-[\frac{39}{20}-\varepsilon]x^{2/3}} \right)$$

On vient en effet de voir que le quotient est majoré sur $[1, +\infty[$ et il est bien sûr positif.

- d) En minorant $g(t, x)$ par $3(x/2)^{2/3}$ (question **6.a**), je remarque que (pour $m > 1$ pour que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0, \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} dt \leq e^{-3(x/2)^{2/3}} \int_0^{x^{1/3}} t^m dt = \frac{x^{\frac{m+1}{3}}}{m+1} e^{-3(x/2)^{2/3}}$$

Par ailleurs, je prétends que $\frac{39}{20} > \frac{3}{2^{2/3}}$ (partir de $13^3 > 2000$ pour en déduire $4 * 13^3 > 20^3$ puis $4 > (20/13)^3$ etc.). Je peux alors choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{39}{20} - \varepsilon > \frac{3}{2^{2/3}}$ afin que $e^{-[\frac{39}{20}-\varepsilon]x^{2/3}} = o(x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}})$. La question précédente montre alors que $e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} dt$ est négligeable devant $x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}}$. Avec **6.b** on en déduit que

$$T_m(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} dt$$

et ainsi

$$T_m(x) = O_{x \rightarrow \infty} \left(x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}} \right)$$

7.

- a) La question **5.a** nous indique que

$$\forall x > 0, T_{-1}(x) = \int_0^{\infty} e^{-(1/u^2+xu)} \frac{du}{u}$$

On découpe l'intégrale en deux (sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$). On a $e^{-(1/u^2+xu)}$ qui est plus petit que e^{-1/u^2} et que e^{-xu} . Or, $u \mapsto \frac{e^{-1/u^2}}{u}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (seul problème en 0 où la fonction est prolongeable par continuité par la valeur 0) et $u \mapsto \frac{e^{-xu}}{u}$ l'est sur $[1, +\infty[$

(seul problème en ∞ où la fonction est négligeable devant $1/u^2$ par croissance comparées et puisque $x > 0$). On a donc

$$\forall x > 0, T_{-1}(x) \leq \int_0^1 e^{-1/u^2} \frac{du}{u} + \int_1^\infty e^{-xu} \frac{du}{u}$$

Dans la première intégrale, on pose $v = 1/u$ pour obtenir $\int_0^1 e^{-1/u^2} \frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} e^{-v^2} \frac{dv}{v}$ que l'on majore par $\int_1^{+\infty} e^{-v} \frac{dv}{v}$. Dans la seconde, on pose $v = u$ pour obtenir $\int_1^\infty e^{-xu} \frac{du}{u} = \int_x^\infty e^{-v} \frac{dv}{v}$. On a alors

$$\forall x > 0, T_{-1}(x) \leq 2 \int_1^{+\infty} e^{-v} \frac{dv}{v} + \int_x^1 e^{-v} \frac{dv}{v}$$

En remarquant que $\int_1^{+\infty} e^{-v} \frac{dv}{v} \leq \int_1^\infty e^{-v} dv = 1$, on a alors

$$\forall x > 0, T_{-1}(x) \leq 2 + \int_x^1 e^{-v} \frac{dv}{v}$$

- Si $x \geq 1$, l'intégrale du membre de droite est ≤ 0 et $T_{-1}(x) \leq 2$.
- Si $x \in]0, 1]$, on majore $\frac{e^{-v}}{v}$ par $1/v$ pour obtenir $T_{-1}(x) \leq 2 - \ln(x)$.

b) Fixons $x \in [0, L]$. $g_x : y \mapsto \rho(y)T_{-1}(|x - y|)$ est continue sur $[0, L] - \{x\}$. Pour tout $y \in [0, L]$, on a $|x - y| \leq 1$ (car $x, y \in [0, L]$ et $L \in [0, 1]$). On a donc

$$\forall y \in [0, L], |g_x(y)| \leq \|\rho\|_\infty T_{-1}(|x - y|) \leq \|\rho\|_\infty (2 - \ln(|x - y|)) = o_{y \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{|x - y|}}$$

ce qui prouve que g_x est intégrable au voisinage de x . Finalement, g_x est intégrable sur $[0, L]$ et $[F(\rho)](x)$ existe. La majoration précédente donne (les quantités écrites existent)

$$\begin{aligned} |[F(\rho)](x)| &\leq \int_{[0, L]} \|\rho\|_\infty T_{-1}(|x - y|) dy \\ &\leq \|\rho\|_\infty \left(\int_{[0, L]} (2 - \ln(|x - y|)) dy \right) \\ &\leq \|\rho\|_\infty \left(2L - \int_{[0, L]} \ln(|x - y|) dy \right) \end{aligned}$$

$\int_{[0, L]} \ln(|x - y|) dy = \int_0^x \ln(x - y) dy + \int_x^L \ln(y - x) dy = \int_0^x \ln(u) du + \int_0^{L-x} \ln(v) dv$ et on sait calculer ces intégrales (une primitive de $\ln(v)$ est $v \ln(v) - v$). Pour $x \in]0, L[$, on obtient

$$\int_{[0, L]} \ln(|x - y|) dy = x \ln(x) + (L - x) \ln(L - x) - L$$

Posons $h : x \mapsto x \ln(x) + (L - x) \ln(L - x) - L$; c'est une fonction dérivable sur $]0, L[$ et $h'(x) = \ln(x) - \ln(L - x)$. h est décroissante sur $]0, L/2]$ puis croît sur $[L/2, L[$. Elle est minimale en $x = L/2$ et ainsi

$$\int_{[0, L]} \ln(|x - y|) dy = h(x) \geq h(L/2) = L \ln(L) - (1 + \ln(2))L \geq L \ln(L) - 2L$$

On a finalement

$$|[F(\rho)](x)| \leq \|\rho\|_\infty (4L - L \ln(L)) = \|\rho\|_\infty (4L + L |\ln(L)|)$$

ce qui est un peu mieux que l'inégalité demandée.

8.

a) Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in [0, L], v \mapsto g_0(v)e^{-\frac{x}{v}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall v > 0, x \mapsto g_0(v)e^{-\frac{x}{v}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall a > 0, \forall x \in [0, a], \forall v \in \mathbb{R}_+^*, |g_0(v)e^{-\frac{x}{v}}| \leq |g_0(v)|$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème s'applique et donne

$$\alpha \in C([0, L])$$

b) Soit $v < 0$; notons $h : x \mapsto \int_x^L \rho(y)e^{-\frac{x-y}{v}} dy$. On a aussi

$$\forall x \in [0, L], h(x) = -e^{-x/v} \int_L^x \rho(y)e^{y/v} dv$$

$y \mapsto \rho(y)e^{y/v}$ étant continue sur l'intervalle $[0, L]$, le théorème fondamental indique que $x \mapsto \int_L^x \rho(y)e^{y/v} dv$ en est une primitive sur $[0, L]$. Par théorème d'opération, $h \in C^1([0, L])$ et

$$\forall x \in [0, L], h'(x) = -\frac{1}{v}h(x) - \rho(x)$$

Ainsi, $x \mapsto g(x, v)$ est de classe C^1 et

$$\forall x \in [0, L], \frac{\partial g}{\partial x}(x, v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \left(-\frac{1}{v}h(x) - \rho(x) \right) = \frac{1}{v} \left(-g(x, v) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}\rho(x) \right)$$

Supposons maintenant $v > 0$; on note cette fois $k : x \mapsto \int_0^x \rho(y)e^{-\frac{x-y}{v}} dy$. On montre comme ci dessus que $k \in C^1$ et

$$\forall x \in [0, L], k'(x) = -\frac{1}{v}k(x) + \rho(x)$$

On en déduit que $x \mapsto g(x, v)$ est de classe C^1 et

$$\forall x \in [0, L], \frac{\partial g}{\partial x}(x, v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \left(-\frac{1}{v}k(x) + \rho(x) \right) - \frac{1}{v}g_0(v)e^{-\frac{x}{v}} = \frac{1}{v} \left(-g(x, v) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}\rho(x) \right)$$

Finalement, la même formule est valable dans les deux cas. Enfin,

$$\forall v > 0, g(0, v) = g_0(v) \text{ et } \forall v < 0, g(L, v) = 0$$

s'obtient en remplaçant x par 0 ou v dans l'expression de $g(x, v)$.

9.

a) On suppose $L \in]0, 1/20[$; on est alors dans le cadre de la question 7 et, en particulier, on a

$$\forall \rho \in C([0, L]), \|F(\rho)\|_\infty \leq (4L - 2\ln(L))\|\rho\|_\infty$$

Soit $H : \rho \in C([0, L]) \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}}F(\rho) + \tilde{\alpha}$ où F est la fonction définie en question 7. Pour appliquer le résultat admis, on aimerait que H soit une application de $C([0, L])$ dans lui-même. On a donc besoin de montrer que $F(\rho)$ est continue quand ρ l'est. **Admettons** ce résultat.

Si $\rho_1, \rho_2 \in C([0, L])$, on a

$$\|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\|F(\rho_1) - F(\rho_2)\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\|F(\rho_1 - \rho_2)\|_\infty \leq \frac{(8L - 4L\ln(L))}{\sqrt{\pi}}\|\rho_1 - \rho_2\|_\infty$$

La fonction $x \mapsto 8x - 4x\ln(x)$ est dérivable et sa dérivée $x \mapsto 4(1 - \ln(x))$ est positive sur $]0, 1]$. En particulier, on a $k = \frac{(8L - 4L\ln(L))}{\sqrt{\pi}} \leq \frac{2/5 - \ln(1/20)/5}{\sqrt{\pi}}$ et on vérifie (c'est plus simple avec une calculatrice...) que $k \in [0, 1[$. On peut ainsi utiliser le résultat admis pour en déduire l'existence et l'unicité de la fonction $\tilde{\rho}$ demandée.

- b) On a bien sûr envie de choisir $\tilde{g}$ comme en question 8 en utilisant $\tilde{\rho}$ pour un bon choix de $\tilde{\alpha}$. On choisit

$$\tilde{\alpha} : x \mapsto \int_0^\infty g_0(v) e^{-x/v} dv$$

qui est continue sur $[0, L]$ (question 8.a) et on pose

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x, v) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_x^L \tilde{\rho}(y) e^{-\frac{x-y}{v}} dy, \quad \text{si } v < 0 \\ \tilde{g}(x, v) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_0^x \tilde{\rho}(y) e^{-\frac{x-y}{v}} dy + g_0(v) e^{-\frac{x}{v}} \quad \text{si } v > 0 \end{aligned}$$

où $\tilde{\rho}$ est l'unique fonction continue telle que

$$\forall x \in [0, L], \quad \tilde{\rho}(x) = \tilde{\alpha}(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^L \tilde{\rho}(y) T_{-1}(|x-y|) dy$$

D'après la question 8, on a

- $\forall v \in \mathbb{R}^*, \tilde{g}(\cdot, v)$ est de classe C^1 sur $[0, L]$
- $\forall x \in [0, L], v \in \mathbb{R}^*,$
 $v \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x, v) = \tilde{\rho}(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - \tilde{g}(x, v)$
- $\forall v \in \mathbb{R}_+^*, \tilde{g}(0, v) = g_0(v)$ et $\forall v \in \mathbb{R}_-^*, \tilde{g}(L, v) = 0$.

Il nous reste à montrer que $\forall x \in [0, L], \tilde{g}(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et à évaluer les intégrales (on veut que leur somme soit égale à $\tilde{\rho}(x)$ pour obtenir le dernier point). Je me contente ici de calculer les intégrales en **admettant** les intégrabilités. Lors du calcul qui suit, j'utilise aussi le théorème de Fubini avec des intégrales généralisées (ce qui n'est pas au programme mais est correct quand on travaille avec des fonctions intégrables). Mon calcul est donc assez formel. On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \tilde{g}(x, v) dv &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{-v^2}}{v} \int_x^L \tilde{\rho}(y) e^{-\frac{x-y}{v}} dy \right) dv \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^L \tilde{\rho}(y) \left(\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-v^2}}{v} e^{-\frac{x-y}{v}} dv \right) dy \\ &\stackrel{w=-v}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^L \tilde{\rho}(y) \left(\int_0^\infty \frac{e^{-w^2}}{w} e^{\frac{x-y}{w}} dw \right) dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^L \tilde{\rho}(y) T_{-1}(y-x) dy \end{aligned}$$

et par un calcul similaire,

$$\int_0^\infty \tilde{g}(x, v) dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \tilde{\rho}(y) T_{-1}(x-y) dy + \tilde{\alpha}(x)$$

En sommant, et compte-tenu de la relation vérifiée par $\tilde{\rho}$, on obtient bien

$$\int_{-\infty}^0 \tilde{g}(x, v) dv + \int_0^\infty \tilde{g}(x, v) dv = \tilde{\rho}(x)$$