ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE.
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1993

# MATHÉMATIQUES

## PREMIÈRE ÉPREUVE
## OPTIONS M ET P'
## (Durée de l'épreuve : 4 heures)

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES - I.*

*L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 4 pages.*

La première partie de ce problème est consacrée à l'étude d'endomorphismes $\varphi$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie dont les puissances $\varphi^n$ sont bornées. La seconde partie est une illustration géométrique de l'étude faite dans la première : on y étudie un exemple de transformation géométrique d'un espace affine $E$ de dimension 3 dans lui-même. Les résultats de la première partie sont utilisés dans la recherche des points fixes de cette transformation.

### Première partie

Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$) de dimension finie $k$ ; on le munit d'une norme quelconque notée $\| \ \|$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ est convergente s'il existe un élément $x$ de $E$ tel que le réel $\|x_n - x\|$ tende vers zéro quand $n$ tend vers l'infini.

De même, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ est bornée si et seulement si la suite des réels $\|x_n\|$ est bornée. Toutes les normes dans $E$ sont équivalentes ; il est alors clair que ces définitions sont indépendantes de la norme choisie dans $E$.

Ces définitions s'appliquent dans l'espace $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de $E$. Une norme $\| \ \|$ étant choisie dans $E$, on peut en particulier lui associer la norme dans $\mathscr{L}(E)$ définie par la relation :

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x)\| \mid x \in E, \|x\| = 1\}.$$

**I.1** Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}(E)$. Démontrer que les trois énoncés suivants sont équivalents :

a) La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathscr{L}(E)$.

b) Pour tout vecteur $x$, élément de $E$, la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $E$.

c) Étant donnée une base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ de $E$, les $k$ suites $(\varphi_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, sont convergentes dans $E$.

**I.2** De manière analogue, trouver deux énoncés équivalents à l'énoncé suivant : la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathscr{L}(E)$ ; établir l'équivalence de ces énoncés.

**I.3** Soit $\varphi$ un endomorphisme de $E$. Soit $\varphi^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme obtenu en composant $n$-fois $\varphi$ avec lui-même. Montrer que, si la suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, toutes les valeurs propres de $\varphi$ sont de module inférieur ou égal à 1.

Dans les deux questions qui suivent (I.4 et I.5), $\varphi$ est un endomorphisme de $E$ tel que la suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

**I.4** a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $\varphi$ de module 1. Soit $x$ un élément du noyau de l'endomorphisme $(\varphi - \lambda I_E)^2$, noté $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda I_E)^2$ ; $I_E$ est l'endomorphisme identité de $E$.

Calculer le vecteur $\varphi^n(x)$ en fonction du vecteur $x$ et du vecteur $y$ défini par $y = \varphi(x) - \lambda x$ ; en déduire que $x$ est un élément du noyau de l'endomorphisme $\varphi - \lambda I_E$.

Démontrer que $E$ est la somme directe du noyau et de l'espace image de l'endomorphisme $\varphi - \lambda I_E$.

b) Application dans le cas où $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On suppose que $\varphi$ admet au moins une valeur propre de module égal à 1. Démontrer que la matrice $M$ associée à $\varphi$ dans une base appropriée s'exprime à l'aide d'une matrice diagonale $D$ d'ordre $p$ et, généralement, d'une matrice carrée $A$ d'ordre $k-p$ ; les éléments $\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$ de la matrice $D$ sont des nombres complexes de module égal à 1 ; les valeurs propres de la matrice $A$ ont toutes un module strictement inférieur à 1.

La relation liant la matrice $M$ aux matrices $D$ et $A$ est : $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

$D$ est la matrice suivante : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$.

**I.5** Étude d'une suite d'endomorphismes déduits de l'endomorphisme $\varphi$.

Soit $\theta_n$, $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme défini par la relation :

$$\theta_n = \frac{1}{n+1}\left\{I_E + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^n\right\}. \tag{1}$$

a) On suppose que 1 n'est pas valeur propre de l'endomorphisme $\varphi$. Démontrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathscr{L}(E)$.

b) On suppose que 1 est valeur propre de l'endomorphisme $\varphi$. Démontrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathscr{L}(E)$ et que sa limite est un projecteur ; préciser le sous-espace vectoriel image de ce projecteur.

## Deuxième partie

Illustration géométrique des propriétés précédentes

Dans cette partie, $E$ est un espace affine attaché à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ ; considérons dans cet espace affine $E$ quatre points $O$, $A$, $B$, $C$ constituant un repère affine ; posons

$$i = \overrightarrow{OA},\ j = \overrightarrow{OB},\ k = \overrightarrow{OC}.$$

Le couple $(O; i, j, k)$ est un repère de $E$. Désignons par :

- $H$ le plan affine passant par les trois points $A$, $B$ et $C$ ;
- $T$ l'ensemble des points de $H$ qui sont des barycentres des trois points $A$, $B$ et $C$ avec des coefficients positifs ou nuls ;
- $U_1$, $U_2$, $U_3$ trois points de $E$ ; leurs coordonnées dans le repère $(O; i, j, k)$ seront désignées par $(a_1, b_1, c_1)$, $(a_2, b_2, c_2)$, $(a_3, b_3, c_3)$ ;
- $\Phi$ l'application affine définie par les relations :

$$\Phi(O) = O,\ \Phi(A) = U_1,\ \Phi(B) = U_2,\ \Phi(C) = U_3.$$

*Convention de notation :* soit $\theta$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, soit $A$ la matrice associée à $\theta$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ; désignons par $\Theta$ l'application affine qui fait correspondre au point de $E$ de coordonnées $(x, y, z)$ le point de coordonnées $(X, Y, Z)$ définies par la relation

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**II.1** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les trois points $U_1$, $U_2$, $U_3$ pour que $\Phi(H)$ soit inclus dans $H$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les trois points $U_1$, $U_2$, $U_3$ pour que $\Phi(T)$ soit inclus dans $T$.

Dans toutes les questions qui suivent, on suppose que l'inclusion $\Phi(T) \subset T$ a lieu et on se propose de prouver que l'application $\Phi$ possède au moins un point fixe dans $T$.

**II.2** Soit $H_0$ le plan de $E$ parallèle au plan $H$ et passant par $O$. Démontrer l'inclusion :

$$\Phi(H_0) \subset H_0.$$

Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à $\Phi$ suivant la convention de notation ci-dessus ; démontrer que l'espace image de l'application $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est de dimension inférieure ou égale à 2. En déduire que l'endomorphisme $\varphi$ a une valeur propre égale à 1.

**II.3** On désigne par $\Phi^n$ l'application composée de $\Phi$ avec elle-même $n$ fois ; démontrer que les trois suites de termes généraux $\Phi^n(A)$, $\Phi^n(B)$ et $\Phi^n(C)$ sont des suites bornées dans $E$. En déduire que la suite des endomorphismes $\varphi^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est bornée dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

**II.4** Soit $\theta_n$ l'élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ construit à partir de l'endomorphisme $\varphi$ défini ci-dessus selon la relation (1) (question I.5).

a) Démontrer pour tout entier naturel $n$ l'inclusion $\Theta_n(T) \subset T$.

b) Soit $W$ un point quelconque de $T$ ; démontrer que la suite de terme général $\Theta_n(W)$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente. Soit $L_W$ la limite de cette suite ; que dire de l'image par $\Phi$ de ce point $L_W$ ? Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des limites $L_W$ des suites $\Theta_n(W)$ pour tout point $W$ de $T$. Quelle relation simple existe-t-il entre l'ensemble $\mathscr{I}$ des points de $T$ invariants par $\Phi$ et l'ensemble $\mathscr{L}$ ?

**II.5** L'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est supposé égal au vecteur nul :

$$\operatorname{Im}(\varphi - I_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}.$$

Quels sont les points fixes de l'application $\Phi$ contenus dans $T$ ?

**II.6** Dans cette question l'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 et le point $U_1$ est distinct du point $A$.

a) Déterminer les positions possibles des deux points $U_2$ et $U_3$ ; on discutera suivant la position du point $U_1$ dans $T$ en envisageant les trois cas :
- $U_1$ n'appartient ni au segment $[AB]$ ni au segment $[AC]$ ;
- $U_1$ appartient au segment $[AB]$ ;
- $U_1$ appartient au segment $[AC]$.

b) L'objet de cet alinéa est l'étude des deux premiers cas définis ci-dessus.

$1^{er}$ *cas.* Déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des points de $T$ qui sont invariants par l'application affine $\Phi$. Démontrer que la suite des points $A$, $\Phi(A)$, …, $\Phi^n(A)$, …est une suite convergente en calculant les coordonnées de $\Phi^n(A)$. Soit $\Lambda$ le point limite de cette suite. Placer les points $A$, $U_1$, $\Phi^n(A)$ et $\Lambda$ dans l'ensemble $T$. Démontrer que pour tout point $W$ de $T$ la suite $(\Phi^n(W))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente ; soit $L(W)$ sa limite.

Soit $W$ un point de $T$ qui n'est pas aligné avec les points $A$ et $U_1$ ; donner une construction de l'image $\Phi(W)$ en supposant connu le point $U_1$ dans $T$ ; donner une construction de l'image $\Phi^n(W)$ du point $W$ en supposant connu le point $\Phi^n(A)$ dans $T$. En déduire une construction du point $L(W)$. Déduire des résultats précédents la limite de la suite $(\Theta_n(W))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n$ croît indéfiniment.

$2^{ème}$ *cas.* Déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des points de $T$ qui sont invariants par l'application affine $\Phi$. Préciser en particulier l'intersection de cet ensemble avec le segment $[AB]$. En supposant connus les points $U_1$ et $U_2$ et l'ensemble $\mathscr{I}$, construire l'image d'un point $W$ de $T$ par $\Phi$.

**II.7** L'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est supposé être un espace vectoriel de dimension 2. Quels sont le ou les points fixes de l'application $\Phi$ contenus dans $T$ ? En déduire pour tout point $W$ de $T$ la limite de la suite $(\Theta_n(W))_{n\in\mathbb{N}}$.

FIN DU PROBLÈME