

A : Questions préliminaires

1. • L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, (x, t) \longmapsto e^{itx} \cdot f(x)$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

• $|\varphi(x, t)| \leq f(x)$, pour tout $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ et l'application $x \longmapsto f(x)$ est positive, continue intégrable sur \mathbb{R}

Donc ϕ_f existe et continue D'après le théorème de continuité sous le signe intégral

De plus :

• L'application $t \longmapsto \varphi(x, t)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(x, t) = (ix)^k \cdot e^{itx} \cdot f(x)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

• L'application $x \longmapsto \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} , pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

• $|\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(x, t)| \leq |x^k| f(x)$, pour tout $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$

• L'application $x \longmapsto |x^k| f(x)$ est positive, continue et intégrable sur \mathbb{R}

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, ϕ_f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et $\phi_f^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k \cdot e^{itx} \cdot f(x) dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$

2. L'inégalité de Taylor Lagrange entre $x \in \mathbb{R}$ et 0 à l'ordre $n - 1$ ($n \geq 1$), appliquée à la fonction $x \longmapsto e^{ix}$

qui est de classe C^∞ donne : $|e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!}| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{|t| \leq |x|} |i^n e^{it}| = \frac{|x|^n}{n!}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1 : |e^{ix} - \sum_{m=0}^n \frac{(ix)^m}{m!}| \leq \frac{|x|^n}{n!}$

3. L'application $h_{a,b}$ est continue sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ (d'après les théorèmes généraux)

et $\lim_{t \rightarrow 0} h_{a,b}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-ibt}}{i} \cdot \frac{e^{i(b-a)t} - 1}{t} = b - a = h_{a,b}(0)$, donc $h_{a,b}$ est continue sur \mathbb{R}

4. On a : $|h_{a,b}(t)| = |\frac{e^{i(b-a)t} - 1}{t}|$, donc en appliquant le résultat de la question 2) pour $n = 1$, on obtien le résultat.

5. On a : $e^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, e^k \geq \frac{k^n}{n!}$, et en particulier pour $n = k$, on obtien le résultat.

B : La fonction ϕ_f caractérise f

6. Si $\theta = 0$ alors $R(0, T) = 0$

Si $\theta \neq 0$ alors par le changement $u = \theta t$, il vient $R(\theta, T) = \int_{-\theta T}^{\theta T} \frac{\sin u}{u} du$;

Comme l'application $:u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ si $u \neq 0$ et 1 si $u = 0$ est continue, paire on a $:R(\theta, T) = 2.S(\theta T)$

7. Soient $T > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; On a : $R(x, T) - R(y, T) = 2.(S(xT) - S(yT))$ et S impaire, donc :

- * $\lim_{T \rightarrow +\infty} R(x, T) - R(y, T) = 0$ si $x, y > 0$
- * $\lim_{T \rightarrow +\infty} R(x, T) - R(y, T) = \pi$ si $x > 0$ et $y = 0$
- * $\lim_{T \rightarrow +\infty} R(x, T) - R(y, T) = 2\pi$ si $x > 0$ et $y < 0$
- * $\lim_{T \rightarrow +\infty} R(x, T) - R(y, T) = -\pi$ si $x < 0$ et $y = 0$
- * $\lim_{T \rightarrow +\infty} R(x, T) - R(y, T) = -2\pi$ si $x < 0$ et $y > 0$

8. Notons $H : \mathbb{R} \times [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, t) \mapsto h_{a,b}(t).e^{ixt} f(x)$; On a :

* H continue sur $\mathbb{R} \times [-T, T]$ (D'après les théorèmes généraux)

* $t \mapsto H(x, t)$ est intégrable sur $[-T, T]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto \int_{-T}^T H(x, t) dt$ est continue d'après le théorème de continuité sous le signe intégral

* $x \mapsto H(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R} , $\forall t \in [-T, T]$ et $t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} H(x, t) dx = h_{a,b}(t)\phi_f(t)$ est continue sur $[-T, T]$, donc intégrable sur $[-T, T]$

D'après le théorème de Fubini, H est intégrable sur $\mathbb{R} \times [-T, T]$ et $\int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} H(x, t) dx dt = \int_{-T}^T h_{a,b}(t)\phi_f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^T H(x, t) dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^T h_{a,b}(t).e^{ixt} f(x) dt dx$

Or $\int_{-T}^T h_{a,b}(t).e^{ixt} dt = \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt = R(x-a, T) - R(x-b, T)$, donc

$$\int_{-T}^T h_{a,b}(t)\phi_f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).[R(x-a, T) - R(x-b, T)] dx$$

Posons : $g_n(x) = f(x).[R(x-a, n) - R(x-b, n)] = f(x).[S(n(x-a)) - S(n(x-b))]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

* $(g_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} 2\pi.f(x), & \text{si } x \in]a, b[\\ \frac{\pi}{2}.f(a), & \text{si } x = a \\ \frac{\pi}{2}.f(b), & \text{si } x = b \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$ (d'après la question 7.)

* La fonction S est bornée sur \mathbb{R} (Continue, impaire et admet une limite en $+\infty$), donc $|g_n(x)| \leq M.f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

* $x \mapsto f(x)$ est positive continue et intégrable sur \mathbb{R}

D'après le théorème de la convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx$,

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-n}^n h_{a,b}(t).e^{ixt} dt dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx$ et par suite :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T h_{a,b}(t)\phi_f(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T}^T h_{a,b}(t).e^{ixt} dt dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx$$

9. S'il existe $(f, g) \in \mathbb{E}^2$ tel que $\phi_f = \phi_g$ et $f \neq g$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $(f-g)_{/][a,b]}$ garde un signe constant. Or $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ (d'après 8.), donc $\int_a^b (f-g)(x) dx = 0$ ce qui contredit le fait que $f-g$ continue de signe constant sur $[a, b]$, d'où le résultat.

C: La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

10. • La fonction f_0 est continue sur les intervalles $] -\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$ (les théorèmes généraux),

de plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x} = 0 = f_0(0)$, donc f_0 est continue positive sur \mathbb{R} .

• $\forall X > 0$, $\int_{-\infty}^X f_0(x) dx = \int_0^X \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \frac{dx}{x}$, en faisant le changement $u = \ln x$, on obtient : $\int_{-\infty}^X f_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\ln X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ et à la limite quand $X \rightarrow +\infty$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 \quad (\text{D'après les données}) ; \text{D'où } f_0 \in \mathbb{E}$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $X > 0$, on a : $\int_{-\infty}^X x^k f_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\ln X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ku - \frac{u^2}{2}} du$ ($u = \ln x$) et à la limite quand $X \rightarrow +\infty$

il vient : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_0(x) dx = e^{\frac{k^2}{2}}$, donc $x \mapsto |x|^k f_0(x)$ est intégrable sur \mathbb{R} et f_0 admet des moments de toutes ordres et $a_k(f_0) = e^{\frac{k^2}{2}}$

12. • La fonction f_a est positive (car $a \sin(2\pi \ln x) \in [-1, 1]$)

• f_a est continue sur \mathbb{R} et $f_a \leq 2 \cdot f_0$, donc f_a est intégrable sur \mathbb{R} .

• Soit $k \in \mathbb{N}$ et $X > 0$, $\int_{-\infty}^X x^k f_a(x) dx = \int_{-\infty}^{\ln X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ku - \frac{u^2}{2}} (1 + \frac{a}{2i}(e^{2i\pi u} - e^{-2i\pi u})) du = \int_{-\infty}^{\ln X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ku - \frac{u^2}{2}} du + \frac{a}{2i} \int_{-\infty}^{\ln X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(k+2i\pi)u - \frac{u^2}{2}} du + \frac{a}{2i} \int_{-\infty}^{\ln X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(k-2i\pi)u - \frac{u^2}{2}} du$, à la limite quand $X \rightarrow +\infty$

il vient : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_a(x) dx = e^{\frac{k^2}{2}} + \frac{a}{2i} e^{(\frac{k}{2} + i\pi)^2} - \frac{a}{2i} e^{(\frac{k}{2} - i\pi)^2} = a_k(f_0) + (-1)^k e^{(\frac{k}{4} - \pi^2)} - (-1)^k e^{(\frac{k}{4} - \pi^2)} = a_k(f_0)$

• pour $k = 0$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x) dx = a_0(f_0) = 1$

Donc $f_a \in \mathbb{E}$ et $a_k(f_0) = a_k(f_a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

D : Une condition sur la suite $a_k(f)$

13. Soit $k \in \mathbb{N}$, $(b_{2k+1}(f))^2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k |x|^{k+1} f(x) dx)^2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} (|x|^k \sqrt{f(x)}) (|x|^{k+1} \sqrt{f(x)}) dx)^2 \leq (\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2k} f(x) dx) \cdot (\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2k+2} f(x) dx)$ (Inégalité de Cauchy Schwarz)

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $(b_{2k+1}(f))^2 \leq a_{2k}(f) \cdot a_{2k+2}(f)$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

• $\frac{(b_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}}}{2k} = \frac{(a_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq M \leq 2M$ et $a_{2k}(f) \leq (2kM)^{2k}$

• $(b_{2k+1}(f))^{\frac{1}{2k+1}} \leq (a_{2k}(f))^{\frac{1}{2(2k+1)}} \cdot (a_{2k+2}(f))^{\frac{1}{2(2k+1)}} \leq ((a_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}})^{\frac{k}{2k+1}} \cdot ((a_{2k+2}(f))^{\frac{1}{2k+2}})^{\frac{k+1}{2k+1}} \leq (2kM)^{\frac{k}{2k+1}} \cdot ((2k+2)M)^{\frac{k+1}{2k+1}} \leq 2M \cdot k^{\frac{k}{2k+1}} \cdot (k+1)^{\frac{k+1}{2k+1}}$

Or $t \mapsto t^{\frac{k}{2k+1}}$ est croissante sur $]0, +\infty[$, donc $k^{\frac{k}{2k+1}} \cdot (k+1)^{\frac{k+1}{2k+1}} \leq (k+1)^{\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}} \leq k+1 \leq 2k+1$

d'où $\frac{(b_{2k+1}(f))^{\frac{1}{2k+1}}}{2k+1} \leq 2M \cdot \frac{2k+1}{2k+1} = 2M$

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{(b_k(f))^{\frac{1}{k}}}{k} \leq 2M$

15. Soient $x, h \in \mathbb{R}$ et n entier ≥ 1

$$\begin{aligned} \phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(h)^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i(x+h)t} dt - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(h)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^m e^{ixt} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{ixt} \cdot \left(e^{iht} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(iht)^m}{m!} \right) dt. \quad \text{En appliquant 2. , il vient :} \\ |\phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(h)^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \left| e^{iht} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(iht)^m}{m!} \right| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{|ht|^n}{n!} dt = \frac{|h|^n}{n!} \cdot b_n(f) \end{aligned}$$

16. Il suffit de montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h|^n}{n!} \cdot b_n(f) = 0$, pour un certain $A > 0$ tel que $|h| < A$.

On sait que $\frac{(b_n(f))^{\frac{1}{n}}}{n} \leq 2M$, donc $b_n(f) \leq (2nM)^n$ et $\frac{|h|^n}{n!} \cdot b_n(f) \leq \frac{(2nM|h|)^n}{n!} = \frac{n^n}{n!} \cdot |2Mh|^n$

En appliquant 5. , il vient : $\frac{|h|^n}{n!} \cdot b_n(f) \leq |2Mhe|^n$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h|^n}{n!} \cdot b_n(f) = 0$, dès que $|h| < A = \frac{1}{2Me}$

ainsi : $\phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(h)^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in]-A, A[$

17. Soit $\ell > 0$ un entier . On a :

$$\phi_f^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx = i^k a_k(f) = i^k a_k(g) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot g(x) dx = \phi_g^{(k)}(0) , \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Or $\phi_f(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(0)$ et $\phi_g(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \phi_g^{(m)}(0)$, pour tout $h \in]-A, A[$, donc $\phi_f^{(m)}(h) = \phi_g^{(m)}(h)$, pour tout $h \in]-A, A[$ et $m \in \mathbb{N}$

Réurrence sur $\ell \in \mathbb{N}^*$

Pour $\ell = 1$, on a : $] -\frac{A}{2}, \frac{A}{2}[\subset]-A, A[$, donc $\phi_f^{(m)}(h) = \phi_g^{(m)}(h)$, pour tout $h \in]-A, A[$ et $m \in \mathbb{N}$

Soit $\ell > 0$ un entier , supposons : $\phi_f^{(m)}(h) = \phi_g^{(m)}(h)$, pour tout $h \in]-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[$ et $m \in \mathbb{N}$

Soit $h \in]-\frac{(\ell+1)A}{2}, \frac{(\ell+1)A}{2}[$, alors $h - \frac{A}{2} \in]-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[$

par la question 16. on a : $\phi_f(h) = \phi_f(h - \frac{A}{2} + \frac{A}{2}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\frac{A}{2})^m}{m!} \phi_f^{(m)}(h - \frac{A}{2})$

et par hypothèse de récurrence , $\phi_f^{(m)}(h - \frac{A}{2}) = \phi_g^{(m)}(h - \frac{A}{2})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$,

donc $\phi_f^{(m)}(h) = \phi_g^{(m)}(h)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$

Ainsi la récurrence établie , et $\phi_f = \phi_g$ sur $] -\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[$ pour tout $\ell > 0$ entier

18. On a : $(] -\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[)_{\ell \geq 1}$ est une suite exhaustive d'intervalle de \mathbb{R} , et $\phi_f = \phi_g$ sur $] -\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[$ pour tout $\ell > 0$ entier , donc $\phi_f = \phi_g$ sur \mathbb{R} et par suite $f = g$ d'après 9.

Conclusion:

Si $f, g \in \mathbb{E}$ admettent des moments de tous ordres , vérifiant la condition (U) , alors $f = g$

E : Application

19. Si $f \in E$ est solution du système en question alors : f admet des moments de tous ordres et $a_0(f) = 1$,

$$a_{2k+1}(f) = 0, \quad a_{2k}(f) = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

De plus $\frac{(a_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}}}{2^k} = \frac{1}{2^k} \left(\frac{(2k)!}{2^k k!} \right)^{\frac{1}{2k}} \sim \frac{1}{2^k} \cdot \sqrt{k} \cdot 2^{\frac{1}{2k}} \longrightarrow 0$ (D'après la formule de Stirling)

donc la suite $(a_{2k}(f))_{k \geq 1}$ vérifie la propriété (U)

D'après la question 16. , $\exists A > 0$ tel que $\phi_f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(x)^m}{m!} \phi_f^{(m)}(0)$, pour tout $x \in]-A, A[$

Or $\phi_f^{(m)}(0) = i^m \cdot a_m(f)$ donc $\phi_f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \cdot \frac{(x)^{2m}}{(2m)!} = e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt - \frac{t^2}{2}} dt = \phi_g(x)$, pour tout $x \in]-A, A[$ où $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Comme $g \in \mathbb{E}$ et $\phi_f^{(m)}(0) = i^m \cdot a_m(f) = \phi_g^{(m)}(0) = i^m \cdot a_m(g)$ alors $a_k(f) = a_k(g)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Ainsi f et g vérifient les conditions de la partie D. , donc $f = g$

Réciproquement :

la fonction $g : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est solution du système en question .

En conclusion : $g : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est l'unique solution du système .

Fin

L.Bouchikhi , Professeur de Spé. CPGE TAZA